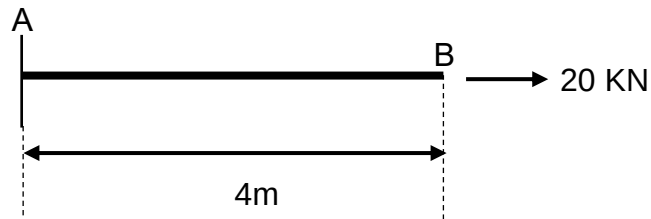


Παράδειγμα Νόμου Hooke με
ισοστατικό φορέα



Για τη δοκό του παραπάνω σχήματος να υπολογιστεί η μεταβολή μήκους λόγω της εφελκυστικής αξονικής δύναμης στην ακραία διατομή Β. να υπολογιστεί το ίδιο μέγεθος, σε περίπτωση που θερμάνουμε τη δοκό κατά $\Delta T = 15^\circ\text{C}$. Δίνονται τα μεγέθη: $d = 20\text{mm}$, $\alpha = 20 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $E = (200)\text{ GPa}$.

ΛΥΣΗ



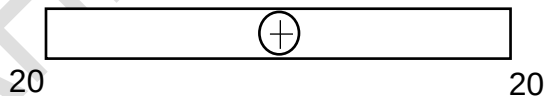
$H_A = (20)\text{ KN}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow V_A = (0)\text{ KN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = (0)\text{ KNm}$$

[N]



$$\text{Νόμος Hooke: } \sigma_{xx} = (E)(\epsilon_{xx}) \Rightarrow \frac{(20)\text{ kN}}{A} = (200 \times 10^6) \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \times \frac{(\Delta \ell)}{4\text{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \ell = \frac{(20)(4)}{(200 \times 10^6)} \cdot \frac{1}{A}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{(3,14)}{4} (20 \times 10^{-3})^2 \Rightarrow A = (3,14 \times 10^{-4}) \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow \Delta \ell = \frac{(80)}{(200 \times 10^6)(3,14 \times 10^{-4})} \Rightarrow \Delta \ell = (1,273 \times 10^{-3}) \text{ m} > 0$$

(επιμήκυνση λόγω εφελκυστικής δύναμης)

Λόγω πρόσθετης θέρμανσης κατά $\Delta T = 15^\circ\text{C}$, έχουμε επιπρόσθετη επιμήκυνση:

$$\Delta \ell' = (\alpha)(\ell)(\Delta T) = \frac{(20 \cdot 10^{-6})}{^\circ\text{C}}(4\text{m})(15)^\circ\text{C} \Rightarrow \Delta \ell' = (1,2 \times 10^{-3}) \text{ m}$$

→ Συνολική μεταβολή μήκους:

$$\Delta \ell_{\text{ολ}} = (\Delta \ell) + (\Delta \ell') \Rightarrow \Delta \ell_{\text{ολ}} = (2,473 \times 10^{-3}) \text{ m}$$

Επίλυση υπερστατικών φορέων με χρήση του νόμου του Hooke

Δίνεται ένας υπερστατικός φορέας στον οποίο έχουμε και καμπτόμενες και μη καμπτόμενες ράβδους. Ζητείται ο υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης ή ο υπολογισμός της αντίδρασης στήριξης στο άκρο μιας μη καμπτόμενης η οποία θα αποτελεί ταυτόχρονα και την αξονική δύναμη.

Τότε, ακολουθούμε την εξής μέθοδο επίλυσης:

- 1) Βρίσκουμε πόσες φορές είναι υπερστατικός ο φορέας.
 - 2) Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας του φορέα. Αν υπάρχει άρθρωση, συχνά «βολεύει» να γράφουμε μόνο ισορροπία ροπών ως προς την άρθρωση.
 - 3) Σε κάθε μη καμπτόμενη ράβδο του φορέα, γράφουμε το νόμο του Hooke με την αξονική δύναμη να είναι άγνωστη, και επιλύουμε τη σχέση ως προς τη μεταβολή μήκους $\Delta \ell$ της ράβδου.
 - 4) Σε κάθε μη καμπτόμενη ράβδο, σχεδιάζουμε την αρχική απαραμόρφωτη και την τελική παραμορφωμένη της κατάσταση, φτιάχνοντας την τριγωνομετρική σχέση μεταξύ της μεταβολής μήκους $\Delta \ell$ και της κάθετης μετατόπισης του άλλου κόμβου της (όχι αυτού που είναι κόμβος στήριξης).
 - 5) Αξιοποιούμε τις αναλογίες των ομοίων τριγώνων στο παραμορφωμένο σχήμα, οι οποίες αφορούν τις μετακινήσεις των κόμβων, και φτιάχνουμε σχέσεις που συσχετίζουν τις μεταβολές μηκών των μη καμπτόμενων ράβδων.
 - 6) Αντικαθιστούμε τη κάθε μεταβολή μήκους με την έκφρασή της από το νόμο του Hooke, και πλέον έχουμε επιπρόσθετες σχέσεις μεταξύ των αντιδράσεων στήριξης. Οι επιπρόσθετες σχέσεις είναι τόσες όσες ο βαθμός υπερστατικότητας του φορέα. Επιλύουμε το σύστημα όλων των σχέσεων (μαζί με τις εξισώσεις ισορροπίας) και βρίσκουμε τα ζητούμενα μεγέθη.
- Παρατήρηση: Αν κάποια μη καμπτόμενη ράβδος του φορέα υφίσταται θερμοκρασιακή μεταβολή, τότε όπου έχουμε μεταβολή μήκους στις παραπάνω σχέσεις θα ισχύει:

$$\Delta \ell_{\text{ολ}} = (\Delta \ell)_{\text{νόμου Hooke}} + (\alpha \ell_{\text{αρχ}} \Delta T)$$