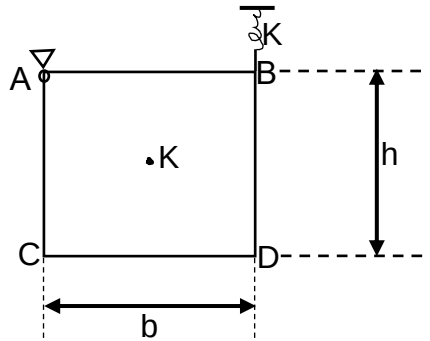


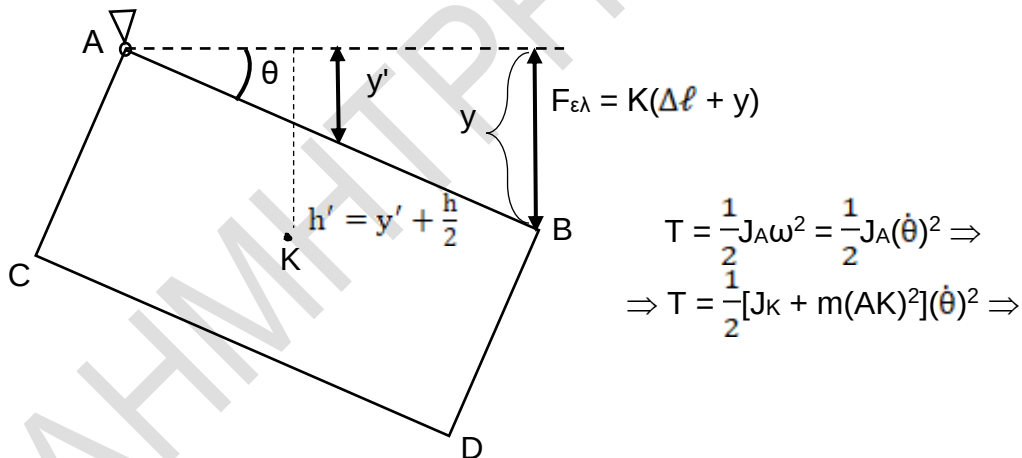
Επαναληπτικές ασκήσεις



Η ομογενής πλάκα ABCD του σχήματος είναι αρθρωμένη σε σταθερό σημείο A, ενώ η κορυφή B είναι προσδεμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς K. Η πλάκα ισορροπεί όταν οι πλευρές της AB, CD είναι οριζόντιες. Δείξτε ότι αν δοθεί μια μικρή ώθηση στην πλάκα, θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης. Τα μεγέθη K, b, h και η μάζα m της πλάκας θεωρούνται γνωστά.

Λύση

$\Delta \ell$: αρχική παραμόρφωση ελατηρίου από τη Θ.Φ.Μ.



$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m}{12} (b^2 + h^2) + m \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] \right\} (\dot{\theta})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \left(\frac{mb^2}{12} + \frac{mh^2}{12} + \frac{mb^2}{4} + \frac{mh^2}{4} \right) (\dot{\theta})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \left(\frac{mb^2}{3} + \frac{mh^2}{3} \right) (\dot{\theta})^2 \quad \boxed{T = \frac{m}{6} (b^2 + h^2) (\dot{\theta})^2} \Rightarrow$$

Ορίζουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο το οποίο διέρχεται από την άρθρωση A.

$$\left. \begin{aligned} U_m &= -mgh' = -mg\left(y' + \frac{h}{2}\right) \\ \tan\theta &= \frac{y'}{\frac{b}{2}} \\ \tan\theta &\cong (\theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_m = -mg\left(\frac{\theta b}{2} + \frac{h}{2}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{\epsilon\lambda} &= \frac{k}{2}(\Delta\ell + y)^2 \\ \tan\theta &= \frac{y}{b} \Rightarrow y = (\tan\theta)(b) \Rightarrow y = (\theta)(b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{\epsilon\lambda} = \frac{k}{2}(\Delta\ell + b\theta)^2$$

$$U_{o\lambda} = U_m + U_{\epsilon\lambda} \Rightarrow U_{o\lambda} = -mg\left(\frac{\theta b}{2} + \frac{h}{2}\right) + \frac{k}{2}(\Delta\ell + \theta b)^2$$

→ Συνάρτηση Lagrange: $L = T - U_{o\lambda} \Rightarrow$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{6}(b^2 + h^2)(\dot{\theta})^2 + mg\left(\frac{\theta b}{2} + \frac{h}{2}\right) - \frac{k}{2}(\Delta\ell + \theta b)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m}{3}(b^2 + h^2)(\dot{\theta}) \quad / \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mg\frac{b}{2} - K(b)(\Delta\ell + \theta b)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{m}{3}(b^2 + h^2)(\ddot{\theta})$$

→ Διαφορική εξίσωση Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \Rightarrow \frac{m}{3}(b^2 + h^2)(\ddot{\theta}) - mg\frac{b}{2} + Kb(\Delta\ell + \theta b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{m}{3}(b^2 + h^2)(\ddot{\theta}) - mg\frac{b}{2} + (b)(K)\Delta\ell + K\theta b^2 = 0 \right\} \quad (1)$$

Εξ. Ισορροπίας: $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow mg\left(\frac{b}{2}\right) - K\Delta\ell(b) = 0 \Rightarrow K(b)\Delta\ell - mg\frac{b}{2} = 0$$

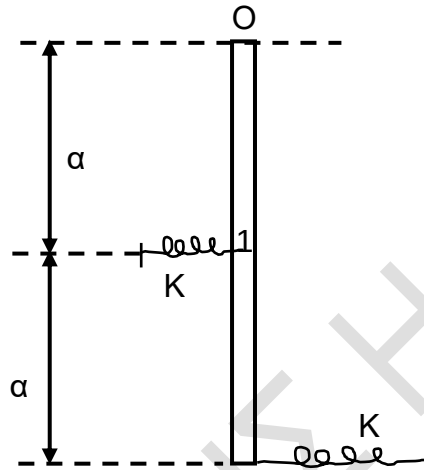
Αντικαθιστώ στην (1) και προκύπτει:

$$\frac{m}{3}(b^2 + h^2)(\ddot{\theta}) + (Kb^2)(\theta) = 0 \Rightarrow (\ddot{\theta}) + \underbrace{\left[\frac{(Kb^2)}{\frac{m}{3}(b^2 + h^2)} \right]}_{\omega^2} (\theta) = 0$$

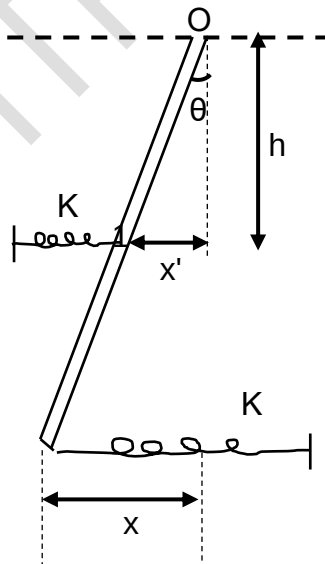
$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{3Kb^2}{m(b^2 + h^2)}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3Kb^2}{m(b^2 + h^2)}}}$$

Θέμα 2^ο (Σεπτέμβρης 2016)

Σε λεπτή ράβδο μάζας m προσδένεται στο άκρο της ελατήριο σταθεράς K . Η ράβδος ισορροπεί αρχικά σε κατακόρυφη θέση, ενώ στο μέσο της είναι προσδεμένο και δεύτερο ελατήριο σταθεράς K . Να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης T που θα εκτελέσει η ράβδος αν της δοθεί μια μικρή ώθηση.



Λύση



$$T = \frac{1}{2} J_O(\omega)^2 = \frac{1}{2} J_O(\dot{\theta})^2$$

$$J_O = J_1 + m(10)^2 = \frac{m}{12}(2\alpha)^2 + m\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{4m\alpha^2}{3}(\dot{\theta})^2$$

$$\Rightarrow J_0 = \frac{m\alpha^2}{3} + m\alpha^2 \Rightarrow J_0 = \frac{4m\alpha^2}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} U_{\epsilon\lambda} &= \frac{k}{2}(x')^2 + \frac{k}{2}(x)^2 \\ \tan\theta &= \frac{x'}{\alpha} \\ \tan\theta &\cong (\theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x' = (\alpha)(\theta) \Rightarrow U_{\epsilon\lambda} = \frac{k}{2}(\alpha\theta)^2 + \frac{k}{2}(2\alpha\theta)^2 \Rightarrow U_{\epsilon\lambda} = \frac{\alpha^2\theta^2k}{2} + \frac{4\alpha^2\theta^2k}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{2\alpha} \Rightarrow x = (2\alpha)(\theta) \Rightarrow U_{\epsilon\lambda} = \frac{5\alpha^2\theta^2k}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} U_m &= -mgh \\ \cos\theta &= \frac{h}{\alpha} \Rightarrow h = (\alpha)\cos\theta \end{aligned} \right\} U_m = -mg\alpha\cos\theta$$

$$U_{o\lambda} = U_{\epsilon\lambda} + U_m \quad \boxed{U_{o\lambda} = \frac{5\alpha^2\theta^2k}{2} - mg\alpha\cos\theta} \Rightarrow$$

→ Συνάρτηση Lagrange:

$$L = T - U_{o\lambda} \Rightarrow L = \frac{2m\alpha^2}{3}(\dot{\theta})^2 - \frac{5\alpha^2\theta^2k}{2} + mg\alpha\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4m\alpha^2}{3}(\dot{\theta}) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{4m\alpha^2}{3}(\ddot{\theta})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mg\alpha\sin\theta - 5\alpha^2\theta k \\ \sin\theta &\cong (\theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\alpha\theta - 5\alpha^2\theta k$$

→ Διαφορική εξίσωση Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) &= 0 \Rightarrow \frac{4m\alpha^2}{3}(\ddot{\theta}) + mg\alpha\theta + 5\alpha^2k\theta = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{4m\alpha^2}{3}(\ddot{\theta}) + (\theta)(mg\alpha + 5\alpha^2k) &= 0 \Rightarrow (\ddot{\theta}) + \frac{(mg\alpha + 5\alpha^2k)}{\frac{4m\alpha^2}{3}}(\theta) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\ddot{\theta}) + \underbrace{\left[\frac{3(mg\alpha + 5\alpha^2k)}{4m\alpha^2}\right]}_{\omega^2}(\theta) = 0$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3(mg\alpha + 5\alpha^2k)}{4m\alpha^2}}}$$