Διαφορικές Εξισώσεις β' τάξης

⇒ <u>Γενική μορφή γραμμικών διαφορικών 2ης τάξης</u>

$\{y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = g(x)\}$ **(1)**

- <u>Γενική Λύση:</u> $y(x) = \underbrace{y_0(x)}_{\text{Λύση ομογενούς}} + \underbrace{y_\mu(x)}_{\text{Μερική λύση}}$

-<u>Επιλύουμε την ομογενή:</u>

$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = 0$
Για την επίλυση της ομογενούς, δημιουργούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\left.\begin{array}{l} y'' \rightarrow \lambda^2 \\ y' \rightarrow \lambda \\ y \rightarrow 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + \alpha\lambda + b = 0}$$

και επιλύουμε το παραπάνω τριώνυμο.

- <u>Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:</u>

α) <u>Αν Δ > 0</u>, ⇒ 2 πραγματικές ρίζες λ_1, λ_2

$$y_0(x) = c_1\underbrace{\left(e^{\lambda_1 x}\right)}_{y_1(x)} + c_2\underbrace{\left(e^{\lambda_2 x}\right)}_{y_2(x)}$$

β) <u>Αν Δ= 0,</u> ⇒ $\lambda_0 = -\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$y_0(x) = c_1\underbrace{\left(e^{\lambda x}\right)}_{y_1(x)} + c_2\underbrace{\left(xe^{\lambda x}\right)}_{y_2(x)}$$

γ) <u>Αν Δ < 0</u>, ⇒ 2 μιγαδικές ρίζες της μορφής:

$\lambda_{1,2} = (\kappa \pm \nu i)$ με $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$

$y_0(x) = e^{\kappa x}[c_1 \cos(\nu x) + c_2 \sin(\nu x)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_0(x) = (c_1)\underbrace{(e^{\kappa x}\cos(\nu x))}_{y_1(x)} + (c_2)\underbrace{(e^{\kappa x}\sin(\nu x))}_{y_2(x)}$$

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ

Επομένως, αφού και λύσουμε την ομογενή, καθορίζουμε τις μερικές λύσεις $y_1(x), y_2(x)$.

<u>Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη μερική λύση $y_\mu(x)$.</u>

$y_\mu(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$
<u>$y_1(x), y_2(x)$:</u> Συναρτήσεις που προέκυψαν από την επίλυση της ομογενούς.

Για να βρούμε τις $c_1(x), c_2(x)$ επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\, y_1(x) \ + c_2{}'(x)\, y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\, y_1{}'(x) \ + c_2{}'(x)\, y_2{}'(x) = g(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεων και εύρεση των $c_1'(x), c_2{}'(x)$. Ολοκληρώνουμε ξεχωριστά την καθεμία από τις δύο, και υπολογίζουμε τις συναρτήσεις $c_1(x), c_2(x)$. Συνεπώς, αφού βρήκαμε τη μερική λύση, υπολογίζουμε τη γενική λύση:

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)}$$

$\Rightarrow$ <u>Μέθοδος υποβιβασμού τάξης</u>

Εφαρμόζεται σε διαφορικές εξισώσεις β' τάξης, στις οποίες είναι γνωστή από την εκφώνηση μια μερική λύση $y_1(x)$.

- <u>Γενική μορφή:</u> $\{y''(x) + f(x)\, y' + g(x) = 0\}$ **(2)**

<u>Θέτω:</u> $y(x) = u(x) y_1 \Rightarrow y'(x) = u'(x) y_1 + u(x) y_1{}'$
Παραγωγίζω εκ νέου και δημιουργώ την y'' και αντικαθιστώ στην αρχική και προκύπτει νέα διαφορική εξίσωση ως προς u(x):

$y''(x) + a\, y'(x) + b\, y(x) = 0$
Για την επίλυση της ομογενούς, δημιουργούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\left.\begin{aligned} u'' + R(x) u' = 0 \\ \text{Θέτω: } w = u' \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad w' + R(x) w = 0 \Rightarrow$$

Υποβιβασμός τάξης

$\Rightarrow$ <u>επίλυση με μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών</u>

$\Rightarrow$ <u>Γενική λύση:</u> $\boxed{y(x) = c_1 y_1(x) + c_2(u(x)\, y_1(x))}$

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ

Διαφορική εξίσωση τύπου Euler

$\{(\alpha x+\beta)^2\, y''(x) + c_1(\alpha x+\beta)\, y' + c_2\, y = g(x)\}$ **(3)**

Θέτω: $t = \ln(\alpha x+\beta) \Rightarrow (\alpha x+\beta) = e^t$

Μετασχηματίζουμε τη διαφορική εξίσωση **(3)** από y(x) σε y(t), και κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}}$$

την τροποποιούμε. Αφού γίνει αυτό, η διαφορική εξίσωση επιλύεται με βάση την προηγούμενη διαδικασία που αναφέρθηκε στις γραμμικές διαφορικές β' τάξης, δηλαδή υπολογίζουμε πρώτα τη λύση της ομογενούς $y_0(t)$ και μετά τη μερική λύση $y_\mu(t)$ και "γυρνάμε" τη γενική λύση στη μορφή y(x).

Επίλυση γραμμικών συστημάτων δ. ε.

α) Συστήματα 2 x 2:

1) Ανάλογα με τις ιδιότητες που έχουμε, υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και καταλήγουμε στη γενική λύση.

2) Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στην περίπτωση που έχουμε μιγαδικές ιδιοτιμές, καθώς θα πρέπει να τροποποιήσουμε και να μετατρέψουμε την παράσταση $\underline{\mu}\, e^{\lambda x}$ σε μιγαδική μορφή.

Υπενθυμίζεται ότι για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών, θα πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση:

$$\boxed{|\underline{A} - \lambda\, \underline{I}\,| = 0}$$

Αφού επιλύσουμε την εξίσωση, βρίσκουμε για κάθε ιδιοτιμή την τιμή της και την πολλαπλότητα της ιδιοτιμής, και υπολογίζουμε ξεχωριστά για κάθε μία το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, μέσω της εξίσωσης:

$$(\underline{A} - \lambda\, \underline{I}\,)(\,\underline{w}\,) = \underline{0}$$

όπου $\underline{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Φτιάχνουμε το σύστημα εξισώσεων με τα x_1, x_2 και προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $\underline{\mu}$ αφού βγάλουμε τα x_1, x_2 κοινούς παράγοντες.

β) <u>Συστήματα 3 x 3:</u>

1) 3 απλές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι οποίες μας δίνουν αντίστοιχα 3 ιδιοδιανύσματα $\underline{\mu_1}$, $\underline{\mu_2}$, $\underline{\mu_3}$. Τότε, η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathrm{c}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{x}} \mu_1 + \mathrm{c}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{x}} \mu_2 + \mathrm{c}_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 \mathrm{x}} \mu_3$$

2) 1 απλή ιδιοτιμή λ_1και μία διπλή ιδιοτιμή λ_2.
Η πρώτη δίνει ένα ιδιοδιάνυσμα $\underline{\mu_1}$ και η δεύτερη δύο ιδιοδιανύσματα $\underline{\mu_2}$ και $\underline{\mu_3}$.

⇒ <u>Γενική λύση συστήματος:</u>

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathrm{c}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{x}} \mu_1 + \mathrm{c}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{x}} \mu_2 + \mathrm{c}_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 \mathrm{x}} \mu_3$$

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ