

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ 1

ΛΥΣΗ

$$u(x, y) = e^{-x} \cos y + xy$$

$$u_x = \cos y (e^{-x})' + y(x)' \Rightarrow u_x = -e^{-x} \cos y + y$$

Η αρμονική συζυγής της $u(x, y)$ θα είναι η πραγματική συνάρτηση $v(x, y)$ για τις οποίες θα ισχύουν οι συνθήκες Cauchy - Riemann:

$$u_x = v_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_y = -e^{-x} \cos y + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int v_y dy = \int y dy - \int e^{-x} \cos y dy + c(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x, y) = \frac{y^2}{2} - e^{-x} \sin y + c(x)$$

$$\text{και } u_y = -v_x \Rightarrow v_x = -u_y \Rightarrow c'(x) + e^{-x} \sin y = -x + e^{-x} \sin y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(x) = -\frac{x^2}{2} + \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα, έχουμε: } v(x, y) = \frac{y^2}{2} - e^{-x} \sin y - \frac{x^2}{2} + \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$$

Αναλυτική συνάρτηση

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = (xy + e^{-x} \cos y) + i \left(\frac{y^2}{2} - e^{-x} \sin y - \frac{x^2}{2} + \kappa \right)$$

ΛΥΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ 2

ΛΥΣΗ

$$u(x, y) = -3xy^2 - 9 + x^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow u_x = 3x^2 - 3y^2$$

Συνθήκες Cauchy - Riemann

$$u_x = v_y \Rightarrow v_y = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int v_y dy = 3x^2 \int 1 dy - 3 \int y^2 dy + c(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow v(x, y) = 3x^2y - 3\frac{y^3}{3} + c(x) = 3x^2y - y^3 + c(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_y = -6xy \\ u_y = -v_x \end{array} \right\} \Rightarrow -6xy = -v_x \Rightarrow v_x = 6xy \Rightarrow \\ \Rightarrow 6xy = c'(x) + 6xy \Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow c(x) = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$$

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = (-3xy^2 - 9 + x^3) + i(3x^2y - y^3 + \kappa)$$

ΛΥΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ 3

ΛΥΣΗ

$$u(x, y) = 3 \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{x^2 + y^2} (2x) = \frac{6x}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{6(x^2 + y^2) - 6x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{6y^2 - 6x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{6y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{6(x^2 + y^2) - 6y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{6x^2 - 6y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= (0) \\ \text{Η συνάρτηση } u(x, y) &\text{είναι συνεχής και έχει συνεχείς} \\ &\text{μερικές παραγώγους } u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Η συνάρτηση $u(x, y) = 3 \ln(x^2 + y^2)$ είναι αρμονική.

Η αρμονική συζυγής της $u(x, y)$, θα είναι η πραγματική συνάρτηση $v(x, y)$ για τις οποίες θα ισχύουν οι συνθήκες Cauchy - Riemann:

$$u_x = v_y \Rightarrow v_y = \frac{6x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int v_y dy = \int \frac{6x}{x^2 + y^2} dy \Rightarrow \\ \Rightarrow v(x, y) = 6x \int \frac{1}{x^2 + y^2} dy \Rightarrow \\ \Rightarrow v(x, y) = 6x \left(\frac{1}{x} \right) \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) + c(x) \Rightarrow \\ \left\{ \Rightarrow v(x, y) = 6 \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) + c(x) \right\} \quad (1)$$

$$\text{Επίσης, ισχύει: } u_y = -v_x \Rightarrow v_x = -u_y \Rightarrow$$
$$(1)$$

$$\Rightarrow v_x = -\frac{6y}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(x) + \frac{\partial}{\partial x} \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{6y}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(x) + \frac{(6) \partial}{\partial x} \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{6y}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(x) + 6 \frac{1 \left(-\frac{y}{x^2}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{6y}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(x) + \frac{6 x^2 \left(-\frac{y}{x^2}\right)}{x^2 + y^2} = -\frac{6y}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(x) - \frac{6y}{x^2 + y^2} = -\frac{6y}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$$

$$\text{Από (1)} \Rightarrow v(x, y) = 6 \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$$