

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Ορισμένα ολοκληρώματα)

1. Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

(Υπόδειξη: Θέτουμε $x = \frac{\pi}{2} - t$)

ΛΥΣΗ:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt \\ \text{Για } x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2} \\ \text{Για } x_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} (-dt)}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t} + \sqrt{\sin t}} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t} + \sqrt{\sin t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \Rightarrow$$

κοινός παράγοντας

με το ζητούμενο ολοκλήρωμα

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \Rightarrow 2I = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

I

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

2. Αποδείξτε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow (0, +\infty)$, ισχύει:

$$I = \int_0^1 \frac{F(x)}{F(x) + F(1-x)} dx = \frac{1}{2}$$

ΛΥΣΗ:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{F(x) + F(1-x) - F(1-x)}{F(x) + F(1-x)} dx \\ &= \int_0^1 1 dx - \underbrace{\int_0^1 \frac{F(1-x)}{F(x) + F(1-x)} dx}_{I'} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = [x]_0^1 - I' \Rightarrow \underbrace{I = (1) - (I')}_{(1)}$$

$$I' = \int_0^1 \frac{F(1-x)}{F(x) + F(1-x)} dx$$

Θέτω: $1-x=t \Rightarrow x=1-t \Rightarrow dx=-dt$

$$\text{Για } x_1=0 \Rightarrow t_1=1$$

$$\text{Για } x_2=1 \Rightarrow t_2=0$$

$$I' = \int_1^0 \frac{F(t)(-dt)}{F(t) + F(1-t)} = - \int_1^0 \frac{F(t)}{F(t) + F(1-t)} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I' = \int_0^1 \frac{F(t)}{F(t) + F(1-t)} dt = \int_0^1 \frac{F(x)}{F(x) + F(1-x)} dx = I$$

$$\text{Από (1): } I = (1) - (I) \Rightarrow 2I = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$$

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΗΛΙΑΣ