

Διαφορικές Εξισώσεις β' τάξης

⇒ Γενική μορφή γραμμικών διαφορικών 2^{ης} τάξης

$$\{y''(x) + a y'(x) + b y(x) = g(x)\} \quad (1)$$

- Γενική Λύση: $y(x) = \underbrace{y_0(x)} + \underbrace{y_\mu(x)}$

Λύση ομογενούς Μερική λύση

-Επιλύουμε την ομογενή:

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0$$

Για την επίλυση της ομογενούς, δημιουργούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\left. \begin{array}{l} y'' \rightarrow \lambda^2 \\ y' \rightarrow \lambda \\ y \rightarrow 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

και επιλύουμε το παραπάνω τριώνυμο.

- Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Αν $\Delta > 0$, ⇒ 2 πραγματικές ρίζες λ_1, λ_2

$$y_0(x) = \underbrace{c_1(e^{\lambda_1 x})}_{y_1(x)} + \underbrace{c_2(e^{\lambda_2 x})}_{y_2(x)}$$

β) Αν $\Delta = 0$, ⇒ $\lambda_0 = -\left(\frac{a}{2}\right)$

$$y_0(x) = \underbrace{c_1(e^{\lambda x})}_{y_1(x)} + \underbrace{c_2(xe^{\lambda x})}_{y_2(x)}$$

γ) Αν $\Delta < 0$, ⇒ 2 μιγαδικές ρίζες της μορφής:

$$\lambda_{1,2} = (\kappa \pm v i) \text{ με } \kappa, v \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} y_0(x) &= e^{\kappa x} [c_1 \cos(vx) + c_2 \sin(vx)] \Rightarrow \\ \Rightarrow y_0(x) &= \underbrace{(c_1)(e^{\kappa x} \cos(vx))}_{y_1(x)} + \underbrace{(c_2)(e^{\kappa x} \sin(vx))}_{y_2(x)} \end{aligned}$$

Επομένως, αφού και λύσουμε την ομογενή, καθορίζουμε τις μερικές λύσεις $y_1(x), y_2(x)$.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη μερική λύση $y_\mu(x)$.

$$y_\mu(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

$y_1(x), y_2(x)$: Συναρτήσεις που προέκυψαν από την επίλυση της ομογενούς.

Για να βρούμε τις $c_1(x), c_2(x)$ επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) &= g(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεων και εύρεση των $c_1'(x), c_2'(x)$.
Ολοκληρώνουμε ξεχωριστά την καθεμία από τις δύο, και υπολογίζουμε τις συναρτήσεις $c_1(x), c_2(x)$. Συνεπώς, αφού βρήκαμε τη μερική λύση, υπολογίζουμε τη γενική λύση:

$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)$

$\Rightarrow$ Μέθοδος υποβιβασμού τάξης

Εφαρμόζεται σε διαφορικές εξισώσεις β' τάξης, στις οποίες είναι γνωστή από την εκφώνηση μια μερική λύση $y_1(x)$.

- Γενική μορφή: $\{y''(x) + f(x) y' + g(x) = 0\}$ **(2)**

Θέτω: $y(x) = u(x)y_1 \Rightarrow y'(x) = u'(x)y_1 + u(x)y_1'$

Παραγωγίζω εκ νέου και δημιουργώ την y'' και αντικαθιστώ στην αρχική και προκύπτει νέα διαφορική εξίσωση ως προς $u(x)$:

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0$$

Για την επίλυση της ομογενούς, δημιουργούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\left. \begin{aligned} u'' + R(x)u' &= 0 \\ \text{Θέτω: } w &= u' \end{aligned} \right\} \Rightarrow w' + R(x)w = 0 \Rightarrow$$

Υποβιβασμός τάξης

$\Rightarrow$ επίλυση με μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών

$\Rightarrow$ Γενική λύση:

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2(u(x) y_1(x))$

Διαφορική εξίσωση τύπου Euler

$$\{(ax + \beta)^2 y''(x) + c_1(ax + \beta) y' + c_2 y = g(x)\} \quad (3)$$

Θέτω: $t = \ln(ax + \beta) \Rightarrow (ax + \beta) = e^t$

Μετασχηματίζουμε τη διαφορική εξίσωση **(3)** από $y(x)$ σε $y(t)$, και κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}}$$

την τροποποιούμε. Αφού γίνει αυτό, η διαφορική εξίσωση επιλύεται με βάση την προηγούμενη διαδικασία που αναφέρθηκε στις γραμμικές διαφορικές β' τάξης, δηλαδή υπολογίζουμε πρώτα τη λύση της ομογενούς $y_0(t)$ και μετά τη μερική λύση $y_\mu(t)$ και "γυρνάμε" τη γενική λύση στη μορφή $y(x)$.

Επίλυση γραμμικών συστημάτων δ. ε.

α) Συστήματα 2 x 2:

- 1) Ανάλογα με τις ιδιότητες που έχουμε, υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και καταλήγουμε στη γενική λύση.
- 2) Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στην περίπτωση που έχουμε μιγαδικές ιδιοτιμές, καθώς θα πρέπει να τροποποιήσουμε και να μετατρέψουμε την παράσταση $\underline{u} e^{\lambda x}$ σε μιγαδική μορφή.

Υπενθυμίζεται ότι για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών, θα πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση:

$$\boxed{|\underline{A} - \lambda \underline{I}| = 0}$$

Αφού επιλύσουμε την εξίσωση, βρίσκουμε για κάθε ιδιοτιμή την τιμή της και την πολλαπλότητα της ιδιοτιμής, και υπολογίζουμε ξεχωριστά για κάθε μία το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, μέσω της εξίσωσης:

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I})(\underline{w}) = \underline{0}$$

όπου $\underline{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Φτιάχνουμε το σύστημα εξισώσεων με τα x_1, x_2 και προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $\underline{\mu}$ αφού βγάλουμε τα x_1, x_2 κοινούς παράγοντες.

β) Συστήματα 3 x 3:

1) 3 απλές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι οποίες μας δίνουν αντίστοιχα 3 ιδιοδιανύσματα $\underline{\mu}_1, \underline{\mu}_2, \underline{\mu}_3$. Τότε, η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 x} \underline{\mu}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \underline{\mu}_2 + c_3 e^{\lambda_3 x} \underline{\mu}_3$$

2) 1 απλή ιδιοτιμή λ_1 και μία διπλή ιδιοτιμή λ_2 .

Η πρώτη δίνει ένα ιδιοδιάνυσμα $\underline{\mu}_1$ και η δεύτερη δύο ιδιοδιανύσματα $\underline{\mu}_2$ και $\underline{\mu}_3$.

⇒ Γενική λύση συστήματος:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 x} \underline{\mu}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \underline{\mu}_2 + c_3 e^{\lambda_3 x} \underline{\mu}_3$$