

Θέμα 3 (Ιούνης 2016)

ΛΥΣΗ

$$f(x) = 2\theta^2(x)^{-3}, x \geq \theta, \theta > 0$$

$$\bar{X} = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{n} \quad \text{μέση τιμή του δείγματος}$$

$$\mu = E(X) = \int_{\theta}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{\theta}^{+\infty} 2\theta^2(x)^{-2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(X) = (2\theta^2) \int_{\theta}^{+\infty} (x)^{-2} dx = (2\theta^2) \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_{\theta}^{+\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(X) = (-2\theta^2) \left[\frac{1}{x} \right]_{\theta}^{+\infty} = (-2\theta^2) \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{\theta} \right) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} E(X) = 2\theta \\ \bar{X} = E(X) \end{array} \right\} \Rightarrow \theta' = \frac{\bar{X}}{2}$$

$$\beta) E(\theta') = E\left(\frac{\bar{X}}{2}\right) = \frac{1}{2n} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{2n} [E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)]$$

$$\Rightarrow E(\theta') = \frac{1}{2n} [2\theta + \dots + 2\theta] = \frac{1}{2n} [n(2\theta)] \Rightarrow E(\theta') = \theta \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ αμερόληπτη εκτιμήτρια

$$\gamma) f(x_1, \theta) = \frac{2\theta^2}{x_1^3}$$

...

$$f(x_n, \theta) = \frac{2\theta^2}{x_n^3}$$

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(\theta) = \frac{(2\theta^2)^n}{(x_1 \dots x_n)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln[L(\theta)] = \ln(2\theta^2)^n - \ln(x_1 \dots x_n)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} (\ln[L(\theta)])' &= \frac{n(4\theta)}{(2\theta^2)} = \frac{2n}{\theta} \\ (\ln[L(\theta)])' &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2n}{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} \rightarrow +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$$\delta) g(\theta) = \frac{1}{\theta} \Rightarrow g'(\theta) = \frac{-1}{\theta^2} < 0 \Rightarrow g \downarrow \Rightarrow g(1-1)$$

- ΕΜΠ της (1/θ):

$$\left. \begin{aligned} g(\hat{\theta}) &= \frac{1}{\hat{\theta}} \\ \hat{\theta} &\rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{g(\hat{\theta}) \rightarrow 0}$$

Θέμα 2 (Σεπτέμβρης 2016)

(α) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{121}$ οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στα ελεγχόμενα κέντρα. Κάθε μία από αυτές ακολουθεί κατανομή Bernoulli με μέση τιμή: $p = (0.1)$ και διασπορά: $p(1-p) = (0.1)(0.9) \Rightarrow$

$$\Rightarrow V[X] = (0.09) \Rightarrow \sigma = \sqrt{(0.09)} \Rightarrow \sigma = (0.3)$$

$$\mu = E(X) = (0.1)$$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν πληροί τις προδιαγραφές} \\ 0, & \text{αν δεν πληροί τις προδιαγραφές} \end{cases}$$

$$\{P[X_1 + X_2 + \dots + X_{121} \geq 15] = ; ; \} \text{ (1)}$$

Η μεταβλητή $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{121}$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu(n) = (0.1)(121) = (12.1)$ και τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{n} = (3.3)$

$$P[S \geq 15] = P[S - (12.1) \geq (2.9)] = P\left[\frac{S - (12.1)}{(3.3)} \geq (0.878)\right] \Rightarrow$$

↓
η μεταβλητή Z
ακολουθεί τυπική
κανονική κατανομή

$$\Rightarrow P[S \geq 15] \simeq 1 - \Phi(0.878) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P[S \geq 15] \simeq 1 - (0.8079) = (0.1921)$$

$$\beta) P[X_1 + X_2 + \dots + X_n \geq 15] \geq (0.5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[S \geq 15] \geq \Phi(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[S - (0.1)n \geq 15 - 0.1(n)] \geq \Phi(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[\frac{S - (0.1)n}{(0.3)(\sqrt{n})} \geq \frac{15 - 0.1(n)}{(0.3)(\sqrt{n})}\right] \geq \Phi(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[Z \geq \frac{15 - 0.1(n)}{(0.3)(\sqrt{n})}\right] \geq \Phi(0) \Rightarrow$$

↓
Ακολουθεί
τυπική κανονική
κατανομή

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{0.1(n) - 15}{0.3 \sqrt{n}}\right) \geq \Phi(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.1(n) - 15}{0.3 \sqrt{n}} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0.1 n) - 15 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq 150 \Rightarrow n_{\min} = (150)$$