Τυπολόγιο

Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Α) Κάνουμε ισοδιαμέριση του [a, b], με: $h = \left(\frac{b-a}{\nu}\right)$

$$x_0 = a \mid x_1 = x_0 + h \mid x_2 = x_0 + 2h \ldots \mid x_\nu = \lambda$$

Β) Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα αντίστοιχα σημεία.

Γ) Υπολογίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος ανάλογα με τη ζητούμενη μέθοδο.

→ Μέθοδος ορθογωνίου: $I = (h)[\, f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{\nu-1})\,]$

→ Μέθοδος Simpson: $I = \left(\frac{h}{3}\right)[\, f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \ldots + f(x_\nu)\,]$

- ν=2 → απλός τύπος Simpson ⇒ $I = \left(\frac{h}{3}\right)[\, f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_\nu)\,]$

$$f(x_0) = f(a)$$
$$f(x_\nu) = b$$

→ Κανόνας τραπεζίου: $I = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}\right]$

Δ) Εκτίμηση σφάλματος ανάλογα με τη ζητούμενη μέθοδο

- Κανόνας Simpson: $|E_s| \leq \max_{a \leq \xi \leq b} |f^{(4)}(\xi)| \frac{(b-a)^5}{(\nu^4)(180)}$

- Κανόνας τραπεζίου: $|E_s| \leq \frac{(b-\alpha)^3}{12} \max_{a \leq \xi \leq b} |f''(\xi)|$

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ

Μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις

1) Ζητείται αρχικά να αποδείξουμε ότι υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είτε με θεώρημα είτε με χρήση γραφικής παράστασης. Η $f(x) = h(x) - g(x)$, θα προκύπτει από τη "διαφορά" των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων h, g. Άρα, το σημείο τομής τους θα αποτελεί ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. <u>Γραφικά,</u> το σημείο αυτό x_0 επειδή δε θα μπορούμε να το προσδιορίσουμε με ακρίβεια, θα το θεωρούμε ίσο με: $x_0 = \frac{(a+b)}{2}$, όπου [a, b] το ευρύτερο διάστημα.

2) Εφαρμόζουμε τις ζητούμενες επαναλήψεις για την αντίστοιχη μέθοδο που ζητείται. Πριν από αυτό, θα πρέπει να ελέγξουμε τη σύγκλιση της μεθόδου.

→ <u>Γενική επαναληπτική μέθοδος:</u> $\boxed{x_{k+1} = g(x_k)}$ **(1)**

<u>Κριτήρια σύγκλισης:</u>

$$|g'(x)| \leq c, \text{ με } 0 \leq c < 1$$

$$g([a, b]) \subseteq [a, b]$$

Στη σχέση **(1)**, εφαρμόζουμε διαδοχικά αριθμό επαναλήψεων.

→ Μέθοδος Newton – Raphson: $\left\{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right\}$ **(2)**

- <u>Κριτήριο σύγκλισης:</u> $\left|\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}\right| \leq (b - a)$, γ εκείνο που τα άκρα a, b του διαστήματος όπου f'(x) είναι κατά μέτρο μικρότερη.

Ομοίως, εφαρμόζουμε τη σχέση **(2)** για διαδοχικές επαναλήψεις.

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ

Εκτίμηση σφάλματος

1) $|x_n - p| \leq (c)|x_{n-1} - x_n| \longrightarrow$ <u>πιο ακριβής σχέση</u>

<u>p</u>: ρίζα της εξίσωσης (απλά αποδεικνύουμε ότι υπάρχει)
<u>n</u>: αριθμός επαναλήψεων

2) $|x_n - p| \leq \frac{(c)^n}{(1-c)}|x_1 - x_0|$

<u>c:</u> σταθερά που προκύπτει από το 1ο κριτήριο σύγκλισης της γενικής επαναληπτικής μεθόδου.

Γραμμικά συστήματα

- <u>Μορφή γραμμικού συστήματος</u>

$\alpha_{11}(x) + \alpha_{12}(y) + (\alpha_{13})(z) = b_1$
$\alpha_{21}(x) + \alpha_{22}(y) + (\alpha_{23})(z) = b_2$
$\alpha_{31}(x) + \alpha_{32}(y) + (\alpha_{33})(z) = b_3$

$\underline{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \rightarrow$ <u>πίνακας τελεστών</u>

<u>1η :</u> Μέθοδος Jacobi

Έστω ο πίνακας $\underline{Q} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}$

$\underline{B} = \underline{Q} - \underline{A} \;\Rightarrow\; \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ -\alpha_{21} & 0 & -\alpha_{23} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & 0 \end{bmatrix}$

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_{33}} \end{bmatrix}$$

<u>Τύπος επαναληπτικής μεθόδου Jacobi</u>

$$\left\{\underline{x_{k+1}} = \underline{c}\,\underline{x_k} + \underline{d}\right\} \quad (\mathbf{A})$$

$$\underline{c} = \underline{Q^{-1}}\,\underline{P} \quad | \quad \underline{d} = \underline{Q^{-1}}\,\underline{B}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

<u>Εκτίμηση σφάλματος</u>

- $\left\|\underline{x_n} - \underline{\bar{x}}\right\|_\infty \leq \frac{\|\underline{c}\|_\infty}{1-\|\underline{c}\|_\infty} \left\|\underline{x_n} - \underline{x_{n-1}}\right\|_\infty$

- $\left\|\underline{x_n} - \underline{\bar{x}}\right\|_\infty \leq \frac{\|\underline{c}\|^n{}_\infty}{1-\|\underline{c}\|_\infty} \left\|\underline{x_1} - \underline{x_0}\right\|_\infty$

<u>Σύγκλιση Jacobi</u>

- Πρέπει $a_{ij} \neq 0$, για i= j

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ

- Πρέπει ο A να παρουσιάζει διαγώνια υπεροχή. Δηλαδή, η απόλυτη τιμή κάθε στοιχείου της κύριας διαγωνίου να είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των απόλυτων τιμών των υπόλοιπων στοιχείων της ίδιας σειράς.

2η: Μέθοδος Gauss – Siedee

- Σύγκλιση μεθόδου

Ίδια κριτήρια με τη μέθοδο Jacobi.

Ξαναγράφουμε το σύστημα και θέτουμε το δείκτη κ στους αγνώστους x, y, z που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο και δείκτη κ+1 στους υπόλοιπους αγνώστους. Επιλύουμε τις εξισώσεις του συστήματος ως προς $x_{\kappa+1}, y_{\kappa+1}, z_{\kappa+1}$ για να δημιουργήσουμε 3 εξισώσεις επαναληπτικού τύπου.

Εκτίμηση σφάλματος στη μέθοδο Gauss – Siedee

$$\|x_n - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{\|c\|_\infty}{1 - \|c\|_\infty} \|x_n - x_{n-1}\|_\infty$$

c: Ο πίνακας που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου Jacobi.

$\bar{x}$: το διάνυσμα (x, y, z) που αντιστοιχεί στη λύση του συστήματος (δεν υπολογίζεται)

x_n: διάνυσμα στη n-οστή επανάληψη

x_{n-1}: διάνυσμα στη (n-1)-οστή επανάληψη

3η: Μέθοδος απαλοιφής κατά Gauss (μερική οδήγηση)

- Επαυξημένος πίνακας: $A' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & b_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & b_3 \end{bmatrix}$

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ

Στόχος η τριγωνοποίηση του $\underline{A'}$.

Βρίσκουμε το στοιχείο της 1ης στήλης με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Κάνουμε ανταλλαγή των στοιχείων της 1ης σειράς με τη σειρά του στοιχείου της 1ης στήλης το οποίο έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Η διαδικασία που ακολουθεί ονομάζεται μερική οδήγηση κατά στήλη.
Πολ/ζουμε τα στοιχεία της 1ης σειράς του νέου πίνακα που προέκυψε με κατάλληλο αριθμό και τα προσθέτουμε στη 2η σειρά, ώστε το πρώτο στοιχείο της 2ης σειράς να μηδενιστεί. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία με στόχο να μηδενιστούν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο. Με βάση την τελευταία μορφή του πίνακα, γράφουμε το νέο σύστημα εξισώσεων και επιλύουμε ως προς x, y, z.

Επαναληπτική μέθοδος σε έτοιμο τύπο

Δίνεται η εξίσωση πινάκων σε έτοιμο επαναληπτικό τύπο:

$$\underline{x_{k+1}} = \underline{c}\,\underline{x_k} + \underline{d} \quad (\text{ή } \underline{x_k} = \underline{c}\,\underline{x_{k-1}} + \underline{d})$$

Ζητείται να ελέγξουμε τη σύγκλιση της μεθόδου.

Κριτήρια σύγκλισης

Α) Διαγώνια υπεροχή του πίνακα $\underline{A}$.

Β) Η φασματική ακτίνα του πίνακα $\underline{c}$ (η κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερη ιδιοτιμή του) να είναι μικρότερη του 1.

Το διαφορετικό σε αυτήν την άσκηση είναι ότι δε δίνεται ο πίνακας $\underline{A}$, άρα ξεκινάμε από το 2ο κριτήριο σύγκλισης.

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ

Αν δεν ισχύει το 2ο κριτήριο σύγκλισης, τότε η Γενική Επαναληπτική Μέθοδος δε συγκλίνει. Διαφορετικά, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση.

Προσέγγιση συναρτήσεων

- Δεδομένα: $f(x)$ και σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ (συνήθως x_0, x_1, x_2) του $[a, b]$
- Ζητούμενο: Να υπολογίσουμε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange $P_n(x)$, δηλαδή εκείνο το πολυώνυμο για το οποίο να ισχύει:

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$
$$P_n(x_1) = f(x_1)$$
$$P_n(x_2) = f(x_2)$$

Τύπος πολυωνύμου παρεμβολής Lagrange

$$\boxed{P_n(x) = l_0 f(x_0) + l_1 f(x_1) + \cdots + l_n f(x_n)}$$

$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$: τιμές της f στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$

$$l_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_n) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ

<u>Προσοχή!!!</u> δείκτης n → σημεία (n+1)

<u>Εκτίμηση σφάλματος στην προσέγγιση συνάρτησης</u>

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \underbrace{[(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)]}_{\substack{\textit{μέγιστο του πολυωνύμου} \\ \textit{και εύρεση μέγιστου } f^{(n+1)}(x)}}$$

<u>2η μέθοδος προσέγγισης συναρτήσεων</u>

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Ο παραπάνω τύπος λέγεται πολυώνυμο μορφής Newton. Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \dots$ εξισώνουμε τις τιμές του πολυωνύμου $P_n(x)$ με τις τιμές της $f(x)$ στα αντίστοιχα σημεία.

$$\left.\begin{array}{r} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n(x_1) = f(x_1) \\ \dots \\ P_n(x_n) = f(x_n) \end{array}\right\} \rightarrow \text{υπολογισμός των } a_0, a_1, \dots, a_n$$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος, χρησιμοποιούμε τον ίδιο τύπο με την εκτίμηση σφάλματος στο πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange.

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΗΛΙΑΣ