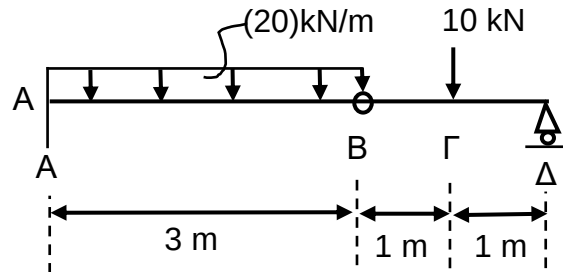
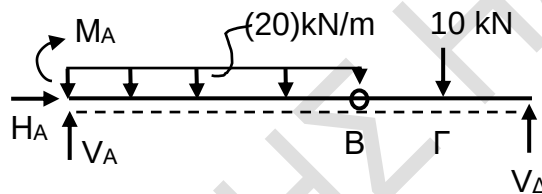


ΑΣΚΗΣΗ

Στον φορέα του σχήματος, να υπολογίσετε τα διαγράμματα [M], [Q], [N] και να τα χαράξετε (στη θέση Α υπάρχει πάκτωση και στη θέση Δ κύλιση).



ΛΥΣΗ



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = (0)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_{\Delta} = (10) + (20 \times 3) \Rightarrow \{V_A + V_{\Delta} = (70)\} \quad (1)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + (10 \times 4) - (V_{\Delta} \times 5) + \left(20 \times 3 \times \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \{5V_{\Delta} - M_A = (130)\} \quad (2)$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow (10 \times 1) - (V_{\Delta} \times 2) = 0 \Rightarrow$$

$$V_{\Delta} = (5) \text{ kN}$$

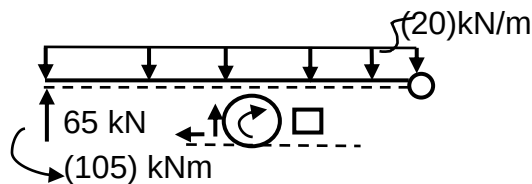
$$\text{Από (1)} \Rightarrow V_A = (65) \text{ kN}$$

$$\text{Από (2)} \Rightarrow M_A = -(105) \text{ kNm}$$

- Επαλήθευση τιμών αντιδράσεων στήριξης:

$$\Sigma M_A = -(10 \times 1) - (20 \times 3) \left(\frac{3}{2} + 2\right) + (65 \times 5) - (105) = -(325) + (65 \times 5) = (0)$$

- Τμήμα AB ($0 \leq x \leq 3\text{m}$)



$$N(x) = 0 \quad / \quad Q(x) = 65 - 20x$$

$$Q(0) = Q(A) = 65 \text{ kN} \quad / \quad Q(B_{\text{ap}}) = 65 - (20 \times 3) = 5 \text{ kN}$$

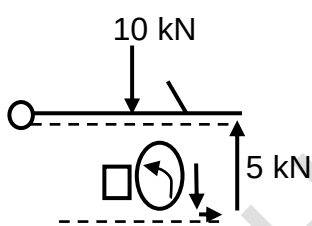
$$M(x) = -(105) - (20) \left(\frac{x^2}{2} \right) + (65x) = -105 - 10x^2 + 65x$$

$$M(A) = -(105) \text{ kNm} \quad / \quad M(B_{\text{ap}}) = -105 - 10(3^2) + (65 \times 3) \Rightarrow M(B_{\text{ap}}) = (0) \text{ kNm}$$

$Q(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{65}{20} = (3.25) \text{ m} > 3 \text{ m}$, συνεπώς δεν υπάρχει σημείο μηδενισμού τεμνουσών δυνάμεων για να βρούμε το αντίστοιχο τοπικό μέγιστο της ροπής κάμψης. Σε αυτήν την περίπτωση, βρίσκουμε τη ροπή στο μέσο του τμήματος για $x = 1,5 \text{ m}$:

$$M(1,5) = -(30) \text{ kNm}$$

- Τμήμα ΔΒ ($0 \leq x \leq 2 \text{ m}$)



$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = -5 \text{ kN} \quad (0 \leq x \leq 1 \text{ m})$$

$$Q(x) = -5 + 10 \quad (1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m})$$

$$= 5 \text{ kN}$$

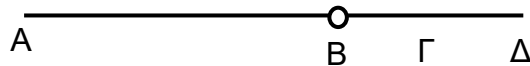
$$M(x) = +5x \quad (0 \leq x \leq 1 \text{ m})$$

$$M(0) = (0) \text{ kNm} \quad / \quad M(1) = M(\Gamma) = +5 \text{ kNm}$$

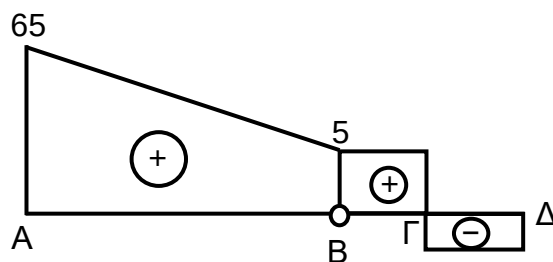
$$M(x) = +5x - 10(x - 1) \quad (1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m})$$

$$M(1) = (5) \text{ kNm} \quad / \quad M(B_{\text{δεξ}}) = M(2) = (0) \text{ kNm}$$

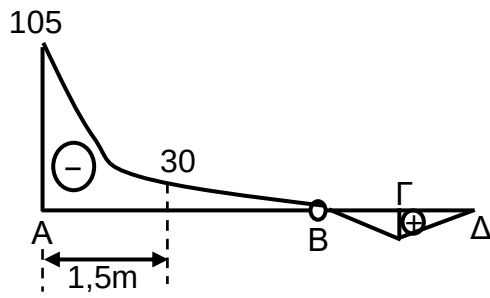
[N]



[Q]



[M]



Στο AB παραβολικό το διάγραμμα των
ροπών κάμψης

Μέθοδοι υπολογισμού αξονικών
ράβδων δικτυώματος

• 1^η μέθοδος: Μέθοδος των κόμβων

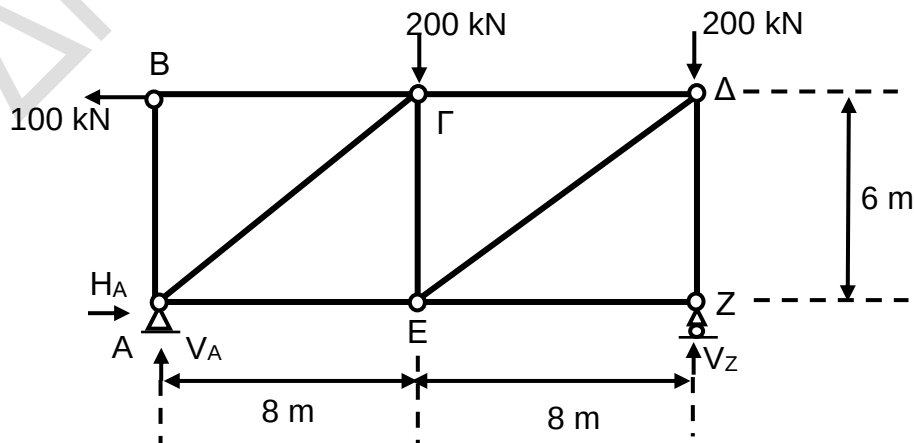
Σε κάθε κόμβο του δικτυώματος ισχύουν 2 εξισώσεις ισορροπίας: $\Sigma F_x = 0$
 $\Sigma F_y = 0$

Στις εξισώσεις αυτές υπεισέρχονται οι εσωτερικές αξονικές δυνάμεις των ράβδων, οι επικόμβιες εξωτερικές φορτίσεις (αν υπάρχουν), και οι αντιδράσεις στήριξης αν ο κόμβος είναι κόμβος στήριξης στο έδαφος. Θα πρέπει να έχουμε το πολύ 2 άγνωστες εσωτερικές δυνάμεις, άρα θέλει προσοχή από ποιον κόμβο θα ξεκινήσουμε την επίλυση.

SOS!! Όταν μας ζητείται ο υπολογισμός των αξονικών των ράβδων του δικτυώματος, πρέπει να βρούμε την αξονική κατά μέτρο και να δείξουμε αν είναι εφελκυστική ή θλιπτική. Η γενική μέθοδος είναι η εξής: τοποθετούμε στον κόμβο τις αξονικές ως εφελκυστικές. Αυτή τη διαδικασία την ακολουθούμε διαδοχικά σε όσους κόμβους χρειάζεται, είτε η δύναμη της ράβδου είναι άγνωστη είτε γνωστή. Αφού τελειώσουμε με τον υπολογισμό όλων των ζητούμενων αξονικών δυνάμεων, τότε όσες δυνάμεις έχουν θετικό πρόσημο είναι εφελκυστικές, και όσες έχουν αρνητικό πρόσημο είναι θλιπτικές. Πρακτικά δηλαδή, από την εκκίνηση της άσκησης, θεωρούμε θετικές τις εφελκυστικές δυνάμεις.

ΑΣΚΗΣΗ

Στο παρακάτω δικτύωμα, να υπολογιστούν οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων του δικτυώματος, αφού πρώτα ελεγχθεί ως προς τη στερεότητα και την ισοστατικότητα.



ΛΥΣΗ

$$\left. \begin{array}{l} K = 6 \Rightarrow 2K = 12 \\ \left. \begin{array}{l} m = 3 \\ n = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow m + n = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow (2K) = (m + n) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Το δικτύωμα είναι ολικά ισοστατικό, και είναι και στερεός σχηματισμός διότι αποτελεί διαδοχική παράθεση στερεών τριγωνικών σχηματισμών.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = (100) \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \{V_A + V_Z = (400) \text{ kN}\} (1)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -(100 \times 6) + (200 \times 8) + (200 \times 16) - V_Z \times (16) = 0 \Rightarrow 16V_Z = 4200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_Z = (262,5) \text{ kN}$$

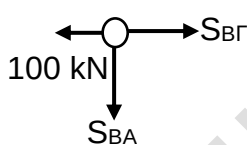
$$V_A = (137,5) \text{ kN}$$

Από (1) $\Rightarrow$

• (+) $\rightarrow$ εφελκυστικές

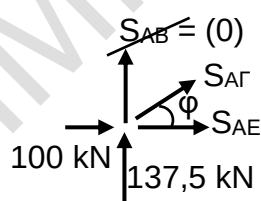
• (-) $\rightarrow$ θλιπτικές

- Κόμβος Β (2 άγνωστες αξονικές δυνάμεις):



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow S_{BG} = (100) \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow S_{BA} = (0) \text{ kN}$$



- Κόμβος Α:

$$\tan \varphi = \frac{6}{8} \Rightarrow \varphi$$

$$= 36,86^\circ$$

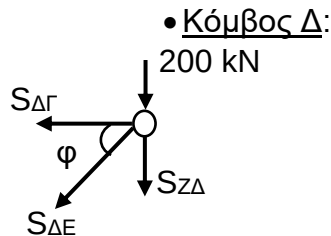
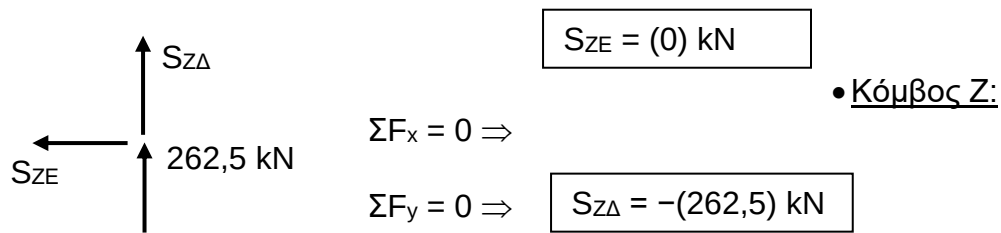
$$\cos \varphi = (0,8)$$

$$\sin \varphi = (0,6)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow S_{AE} + (100) + S_{AG} \cos \varphi = 0 \Rightarrow S_{AE} + (100) + S_{AG}(0,8) = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow S_{AG} \sin \varphi = -137,5 \Rightarrow S_{AG} = -(229,16) \text{ kN}$$

$$\text{και } S_{AE} = (83,33) \text{ kN}$$

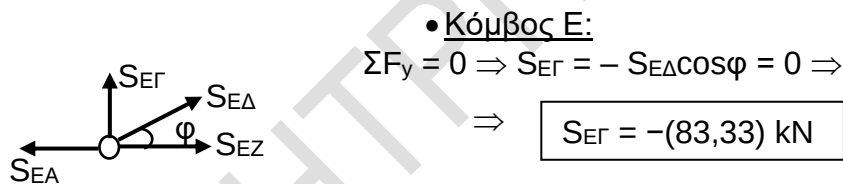


$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -S_{\Delta\Gamma} - S_{\Delta E} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -200 - S_{\Delta\Gamma} - S_{\Delta E} \sin \varphi = 0 \Rightarrow S_{\Delta E}(0,6) = (62,5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta E} = (104,17) \text{ kN}$$

Άρα, $S_{\Delta\Gamma} = -(83,33) \text{ kN}$

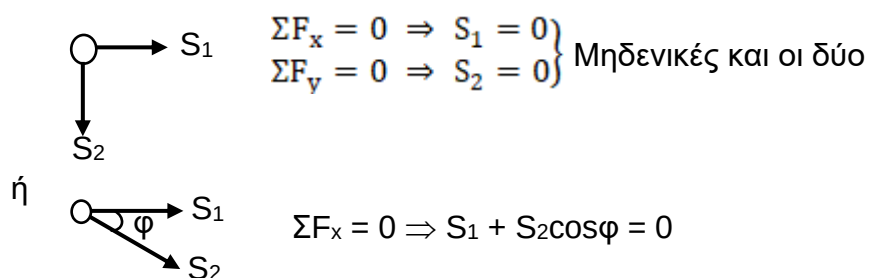


$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow S_{E\Gamma} - S_{E\Delta} (\cos \varphi) = 0 \Rightarrow -(83,33) + (104,17) \times (0,8) = 0 \text{ (που ισχύει)}$$

Ο τελευταίος κόμβος αξιοποιήθηκε για επαλήθευση των αποτελεσμάτων, μέσω της δεύτερης εξίσωσης.

«Βολικοί» κόμβοι υπολογισμού με τη μέθοδο κόμβων

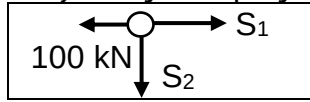
1) Κόμβος με καμία επικόμβια δύναμη και 2 αξονικές δυνάμεις.



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -S_2 \sin \varphi = 0 \Rightarrow S_2 = 0 \text{ και } S_1 = 0$$

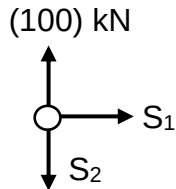
(μηδενικές και οι δύο)

- 2) Κόμβος με 1 επικόμβια δύναμη κατά τη δ/ση ενός εκ των αξόνων x, y και 2 αξονικές δυνάμεις.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow S_1 = (100) \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow S_2 = 0 \text{ (μηδενική η μία, η άλλη ίση με την επικόμβια)}$$

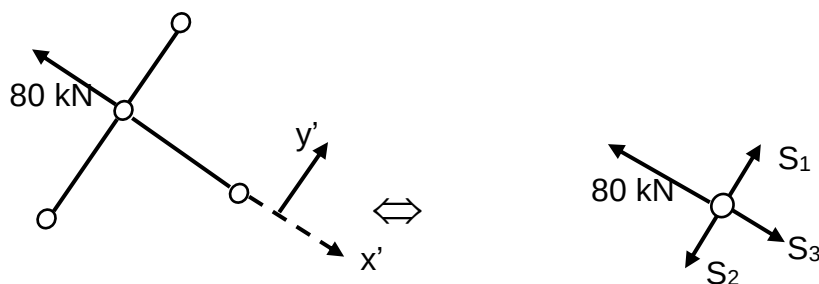
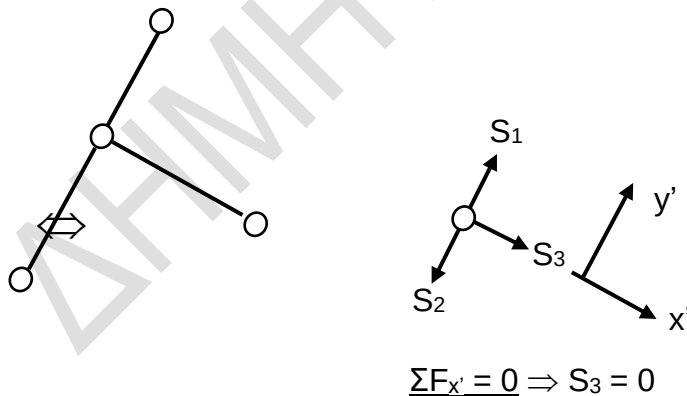
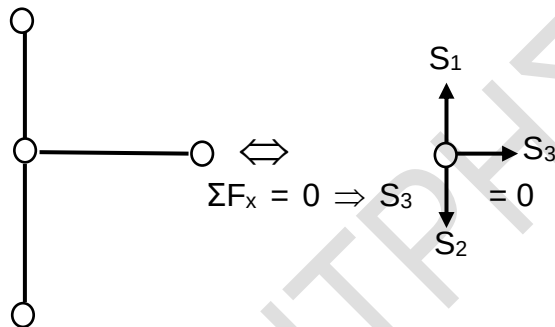


$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow S_1 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow S_2 = (100) \text{ kN}$$

(ομοίως με πριν)

- 3) Κόμβος που δέχεται 3 αξονικές δυνάμεις, εκ των οποίων οι 2 είναι συνευθειακές. Τότε, η τρίτη είναι μηδενική ή ίση με την επικόμβια, αν υπάρχει, κατά τη διεύθυνσή της.



$$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow S_3 = (80) \text{ kN}$$

• 2η μέθοδος: Μέθοδος τομών

Χρησιμοποιείται όταν ζητούνται αξονικές δυνάμεις ράβδων οι οποίες είναι ιδιαίτερα δύσκολο (υπολογιστικά) να βρεθούν με τη μέθοδο των κόμβων, λόγω των πολλών ράβδων του δικτυώματος ή και –σε ορισμένες περιπτώσεις– λόγω των άγνωστων αντιδράσεων στήριξης.

Στη μέθοδο αυτή, φέρνουμε τομή η οποία «κόβει» τις ράβδους για τις οποίες ζητείται η τιμή της αξονικής τους (ή κάποιες εξ' αυτών). Αφού φέρουμε την τομή, οι αντίστοιχες αξονικές λειτουργούν ως εξωτερικές δυνάμεις στα τμήματα του φορέα που προέκυψαν, τις οποίες για να υπολογίσουμε κάνουμε χρήση εξισώσεων ισορροπίας στο πιο «βολικό» από αυτά τα τμήματα από άποψη υπολογισμών. Είναι λογικό, η τομή να περιλαμβάνει 2 ή 3 ράβδους (άρα και αξονικές άγνωστες), τις οποίες τις τοποθετούμε ως εφελκυστικές και αν βγουν θετικές είναι όντων εφελκυστικές, αλλιώς είναι θλιπτικές.

Παρατηρήσεις γενικές

- 1) Οι μέθοδοι κόμβων και τομών χρησιμοποιούνται πολλές φορές συνδυαστικά για την επίλυση ασκήσεων, καθώς συχνά ζητούνται ορισμένες από τις αξονικές των ράβδων του δικτυώματος και όχι όλες.
- 2) Σε ασκήσεις, μπορεί να χρειαστεί να φέρουμε και παραπάνω από 1 τομές, ανάλογα με τις ζητούμενες αξονικές (2 ή 3 ράβδους η κάθε τομή).
- 3) Οι «βολικοί» κόμβοι των σελίδων 11 και 12, είναι καλό να αναζητούνται από την αρχή στην επίλυση, διότι συχνά απλοποιούν τους υπολογισμούς.
- 4) Σε ασκήσεις μπορεί να μην μπορούμε να βρούμε τις τιμές των αντιδράσεων στήριξης (λόγω εξωτερικής υπερστατικότητας), αλλά τις ζητούμενες αξονικές θα μπορούμε να τις βρούμε αξιοποιώντας τις προηγούμενες παρατηρήσεις.
- 5) Σε ορισμένες εκφωνήσεις ασκήσεων, όπου ζητούνται οι τάσεις δικτυώματος, θα σημαίνει οι αξονικές των ράβδων του δικτυώματος.