

Ιούνιος 2017

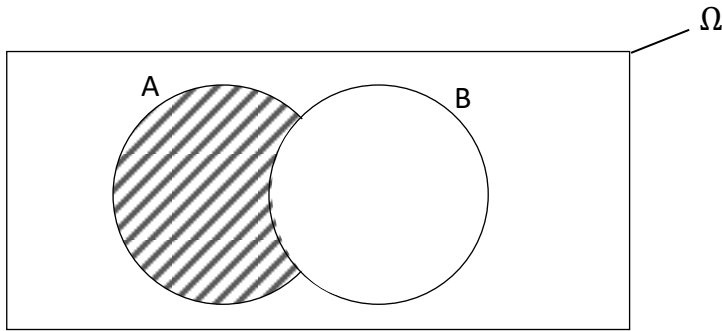
Για τα ενδεχόμενα A και B δίνεται ότι:

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3} \text{ και } P(A|B) = P(A|B^c).$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A \cup B^c)$. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B) - P(AB^c) \quad (1)$$



$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow P(B^c) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Ισχύει: } P(A|B) = P(A|B^c) \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB^c)}{P(B^c)} \Rightarrow \frac{P(AB)}{\frac{1}{3}} = \frac{P(AB^c)}{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} &\Rightarrow P(AB^c) = 2P(AB) \\ &P(AB^c) = P(A) - P(AB) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) - P(AB) = 2P(AB) \Rightarrow 3P(AB) = P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(AB) = \frac{P(A)}{3} \Rightarrow P(AB) = \frac{1}{6}$$

$$\underline{\text{Συνεπώς, προκύπτει:}} P(AB^c) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\text{Αντικαθιστώ στην (1):}} \Rightarrow P(A \cup B^c) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B^c) = \frac{5}{6}$$

Άσκηση

Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός κάποιας πόλης αποτελείται κατά 40% από άνδρες και κατά 60% από γυναίκες. Υποθέτουμε ακόμα ότι το 50% του αρσενικού και το 30% του θηλυκού πληθυσμού είναι καπνιστές. Να βρεθεί η πιθανότητα ένας καπνιστής να είναι γένους αρσενικού.

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο: 'άτομο αρσενικού γένους'

Έστω Θ το ενδεχόμενο: 'άτομο θηλυκού γένους'

Έστω K το ενδεχόμενο: 'άτομο που καπνίζει'

Έστω M το ενδεχόμενο: 'άτομο που δεν καπνίζει'

$$P(A) = 0.4 \quad / \quad P(\Theta) = 0.6$$

$$P(K|A) = 50\% = 0.5 \quad / \quad P(K|\Theta) = 0.3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{P(A|K)} = \frac{P(AK)}{P(K)} \\ \text{Ζητούμενη} \\ \text{πιθανότητα} \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$P(K|A) = \frac{P(KA)}{P(A)} \Rightarrow P(KA) = P(K|A) P(A) = (0.5)(0.4) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(KA) = (0.2)$$

$$\{ P(K) = P(KA) + P(K\Theta) = 0.2 + P(K\Theta) \} \quad (2)$$

(Τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα)

$$P(K|\Theta) = \frac{P(K\Theta)}{P(\Theta)} \Rightarrow P(K\Theta) = (0.3)(0.6) = (0.18)$$

$$\underline{\text{Από (2)}} \Rightarrow P(K) = 0.38 \Rightarrow P(A|K) = \frac{0.2}{0.38} \Rightarrow P(A|K) = (0.526)$$