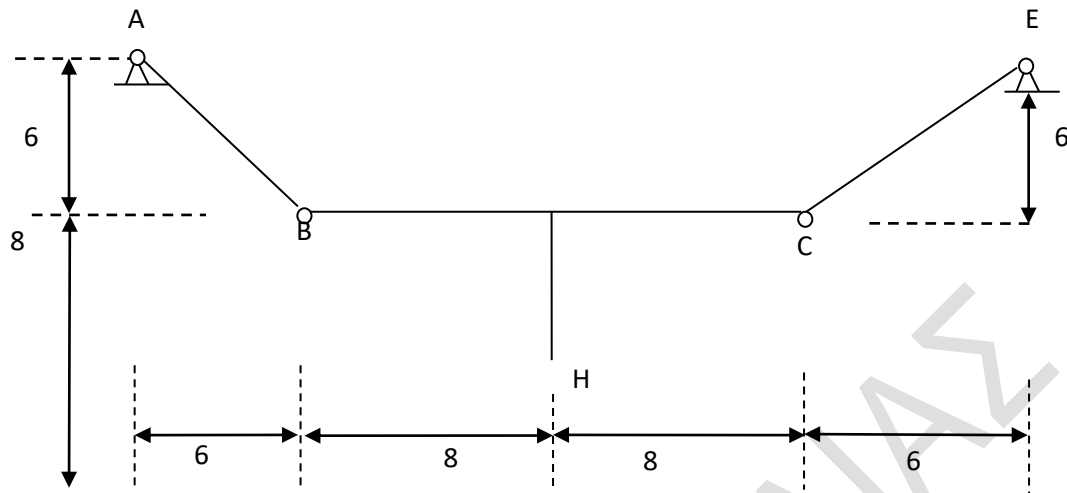


ΑΣΚΗΣΗ



Στο μηχανισμό του σχήματος, το σώμα σχήματος του είναι αρθρωμένο στη BC με τις ράβδους AB, EC. Στη φάση του σχήματος, η γωνιακή ταχύτητα ω της AB είναι (1) μ/sec αντίθετη με τους δείκτες του ρολογιού και είναι σταθερή. Στη φάση αυτή να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου H.

ΛΥΣΗ

Νόμος ταχυτήτων

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_{AB} \times \vec{AB} = (1K) \times (6\vec{i} - 6\vec{j}) \Rightarrow \vec{v}_B = 6(K \times \vec{i}) - (6)(K \times \vec{j}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = 6\vec{j} + 6\vec{i}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + (\omega_{BCH}) \times \vec{BC} = (6\vec{i} + 6\vec{j}) + (\omega_{BCH}K) \times (16\vec{i}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = (6\vec{i} + 6\vec{j}) + (16\omega_{BCH}\vec{j}) \Rightarrow \{\vec{v}_C = (6)\vec{i} + (16\omega_{BCH} + 6)\vec{j}\} \quad (1)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_E + (\omega_{CE}) \times (\vec{EC}) \Rightarrow \vec{v}_C = (\omega_{CE}K) \times (-6\vec{i} - 6\vec{j}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = -6\omega_{CE}\vec{j} + 6\omega_{CE}\vec{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\vec{v}_C = (6\omega_{CE})\vec{i} + (-6\omega_{CE})\vec{j}\} \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow 6 = 6\omega_{CE} \Rightarrow \omega_{CE} = 1K$$

$$\text{και } -6\omega_{CE} = 6 + 16\omega_{BCH} \Rightarrow -6 = 6 + 16\omega_{BCH} \Rightarrow \boxed{\omega_{BCH} = -0,75K}$$

Νόμος ταχυτήτων στο σώμα του

$$\begin{aligned} \underline{v}_H &= \underline{v}_B + \omega_{BCH} \times \underline{BH} \Rightarrow \underline{v}_H = (6\hat{i} + 6\hat{j}) + (-0,75K) \times (8\hat{i} - 8\hat{j}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{v}_H &= (6\hat{i} + 6\hat{j}) - 6\hat{j} + [(-0,75)(-8)(K \times \hat{j})] \Rightarrow \underline{v}_H = (6\hat{i}) - 6\hat{j} \Rightarrow \boxed{\underline{v}_H = (0)} \end{aligned}$$

Νόμος επιταχύνσεων

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_B &= \cancel{\underline{\gamma}_A} + (\omega_{AB}) \times \cancel{(\underline{AB})} - (\omega_{AB})^2 (\underline{AB}) \Rightarrow \underline{\gamma}_B = - (1)^2 (6\hat{i} - 6\hat{j}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\gamma}_B &= (16)(K \times \hat{i}) + (12)(K \times \hat{j}) - (9)(4\hat{i} + 3\hat{j}) \Rightarrow \boxed{\underline{\gamma}_B = (-6\hat{i} + 6\hat{j})} \end{aligned}$$

($\omega_{AB} = 0$ αφού η ω_{AB} είναι σταθερή)

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_C &= \underline{\gamma}_B + (\dot{\omega}_{BCH}) \times (\underline{BC}) - (\omega_{BCH})^2 (\underline{BC}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\gamma}_C &= (-6\hat{i} + 6\hat{j}) + \dot{\omega}_{BCH} K \times (16\hat{i}) - (-0,75)^2 (16\hat{i}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\gamma}_C &= (-6\hat{i} + 6\hat{j}) + 16\dot{\omega}_{BCH} \hat{j} - 9\hat{i} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\gamma}_C &= (-15)\hat{i} + (16\dot{\omega}_{BCH} + 6)\hat{j} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_C &= \cancel{\underline{\gamma}_E} + \dot{\omega}_{CE} \times \underline{EC} - (\omega_{CE})^2 (\underline{EC}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\gamma}_C &= (\dot{\omega}_{CE} K) \times (-6\hat{i} - 6\hat{j}) - (1)^2 (-6\hat{i} - 6\hat{j}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\gamma}_C &= (6\dot{\omega}_{CE} + 6)\hat{i} + (6 - 6\dot{\omega}_{CE})\hat{j} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) &= (4) \Rightarrow -15 = 6 + 6\dot{\omega}_{CE} \Rightarrow \dot{\omega}_{CE} = \left(-\frac{21}{6}\right) K \\ \text{και } \cancel{-6\dot{\omega}_{CE}} &= \cancel{6} + 16\dot{\omega}_{BCH} \Rightarrow \dot{\omega}_{BCH} = \left(\frac{21}{16}\right) K \end{aligned}$$

Νόμος ταχυτήτων στο σώμα του

$$\begin{aligned} \underline{v}_H &= \underline{v}_B + (\dot{\omega}_{BCH}) \times (\underline{BH}) - (\omega_{BCH})^2 (\underline{BH}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{v}_H &= (-6\hat{i} + 6\hat{j}) + \left(\frac{21}{16}\right) K \times (8\hat{i} - 8\hat{j}) - (-0,75)^2 (8\hat{i} - 8\hat{j}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\gamma_H} = (-6 \underline{i} + 6 \underline{j}) + \left(\frac{21}{2}\right) \underline{j} + \left(\frac{21}{2}\right) \underline{i} - 4,5 \underline{i} + 4,5 \underline{j} \Rightarrow$$

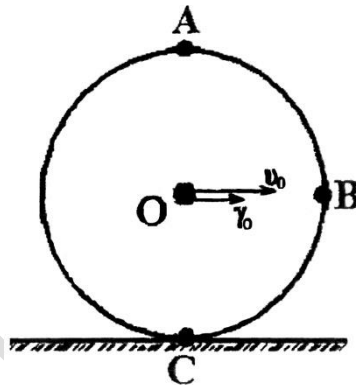
$$\Rightarrow \underline{\gamma_H} = (-10,5 \underline{i} + \frac{21}{2} \underline{i}) + \left(\frac{21}{2}\right) \underline{j} + (4,5 \underline{j}) + (6 \underline{j}) \Rightarrow \boxed{\underline{\gamma_H} = (21) \underline{j}}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2011

ΘΕΜΑ 1

Τροχός κέντρου O και ακτίνας R = 2 m κυλιέται προς τα δεξιά, χωρίς να ολισθαίνει, σε ακίνητο ευθύγραμμο οδηγό. Την χρονική στιγμή που φαίνεται στο σχήμα, το κέντρο του έχει ταχύτητα $u_0 = 12 \text{ m/sec}$ και επιτάχυνση $\gamma_0 = 30 \text{ m/sec}^2$. Να βρεθούν η γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση του τροχού, καθώς και οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των σημείων A, B, C, της περιφέρειάς του, την δεδομένη χρονική στιγμή.

$$(u_A = u_0 + \omega \times OA, \gamma_A = \gamma_0 + \dot{\omega} \times OA - \omega^2 OA)$$



ΛΥΣΗ / Θέμα 1^ο

Ισχύουν για το κέντρο του τροχού οι εξής σχέσεις λόγω της κύλισης χωρίς ολίσθηση:

$$|u_0| = |\omega|R \Rightarrow |\omega| = \frac{(12) \cancel{\text{m}}/\text{s}}{2 \cancel{\text{m}}} \Rightarrow |\omega| = (6) \text{s}^{-1} = (6) \text{rad/s}$$

Εφόσον η ταχύτητα u_0 του κέντρου του τροχού έχει φορά προς τα δεξιά, τότε

$$\text{η } \omega \text{ θα έχει ωρολογιακή φορά περιστροφής} \Rightarrow \boxed{\underline{\omega} = -6 \underline{K}}$$

$$|\gamma_0| = |\dot{\omega}|R \Rightarrow |\dot{\omega}| = \frac{(30) \text{m/s}^2}{2 \text{m}} \Rightarrow |\dot{\omega}| = (15) \text{s}^{-2} = (15) \text{rad/s}^2$$

Ομοίως, εφόσον η επιτάχυνση γ_0 του κέντρου του τροχού έχει φορά προς τα

$$\boxed{\underline{\dot{\omega}} = -15 \underline{K}}$$

δεξιά, τότε η $\vec{\omega}$ θα έχει ωρολογιακή φορά περιστροφής $\Rightarrow$

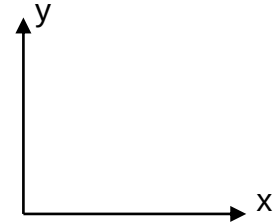
Σημείο A

Έστω το κέντρο $O(0, 0)$ οι αντίστοιχες συντεταγμένες του

$$A(0, R) = A(0, 2)$$

$$C(0, -R) = A(0, -2)$$

$$B(R, 0) = A(2, 0)$$



$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{OA}) = (12\vec{i}) + (-6\vec{k}) \times (2\vec{j}) \Rightarrow \vec{v}_A = (12\vec{i}) + 12\vec{i} \Rightarrow \vec{v}_A = (24)\vec{i}$$

$$\vec{\gamma}_A$$

$$= \vec{\gamma}_O + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{OA}) - \omega^2(\vec{OA}) \Rightarrow \vec{\gamma}_A = (30\vec{i}) + (-15\vec{k}) \times (2\vec{j}) - (-6)^2(2\vec{j}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_A = (30\vec{i}) + (30\vec{i}) - 72\vec{j} \Rightarrow$$

Σημείο B

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{OB}) = (12\vec{i}) + (-6\vec{k}) \times (2\vec{i}) \Rightarrow \vec{v}_B = (12\vec{i}) + 12\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_B = (12\vec{i} - 12\vec{j})$$

$$\vec{\gamma}_B$$

$$= \vec{\gamma}_O + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{OB}) - \omega^2(\vec{OB}) \Rightarrow \vec{\gamma}_B = (30\vec{i}) + (-15\vec{k}) \times (2\vec{i}) - (-6)^2(2\vec{i}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_B = (30\vec{i}) - (30\vec{j}) - 72\vec{i} \Rightarrow$$

Σημείο C

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + (\vec{\omega} \times \vec{OC}) = (12\vec{i}) + (-6\vec{k}) \times (-2\vec{j}) \Rightarrow \vec{v}_C = (12\vec{i}) - 12\vec{i} \Rightarrow \vec{v}_C = 0$$

$$\vec{\gamma}_C$$

$$= \vec{\gamma}_O + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{OC}) - \omega^2(\vec{OC}) \Rightarrow \vec{\gamma}_C = (30\vec{i}) + (-15\vec{k}) \times (-2\vec{j}) - (-6)^2(-2\vec{j}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_C = (30\vec{i}) - (30\vec{i}) + 72\vec{j} \Rightarrow$$