

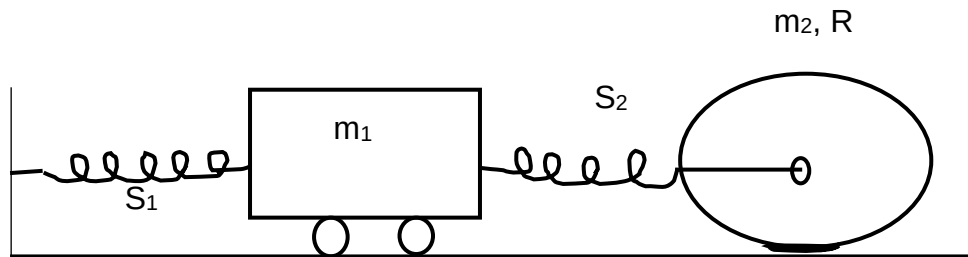
(Θέμα 2 – Κανονική 2016)

Όχημα μάζας m_1 ευρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο, επί του οποίου μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, και είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο με ελατήριο σταθεράς s_1 . Στο όχημα είναι συνδεδεμένος ομοιογενής κύλινδρος μάζας m_2 και ακτίνας R , μέσω ελατηρίου σταθεράς s_2 , και μπορεί να κυλάει χωρίς ολίσθηση στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το όχημα, όπως στο σχήμα.

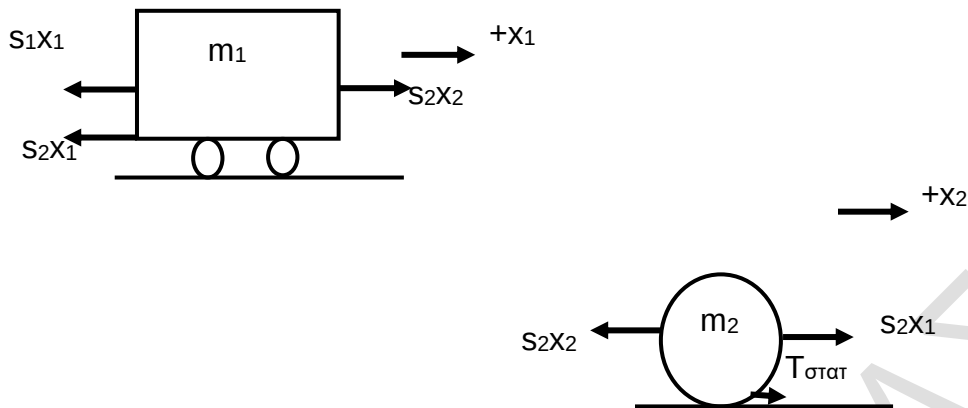
(α) Υποθέτοντας μικρή οριζόντια διαταραχή του συστήματος από την κατάσταση ισορροπίας (έτσι ώστε ο κύλινδρος να κυλάει χωρίς ολίσθηση), να γράψετε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης που ικανοποιούν οι μετατοπίσεις x_1 και x_2 του κάθε σώματος, αντίστοιχα, από τη θέση ισορροπίας.

(β) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης $x_1 = A \cos(\omega t + \phi)$, $x_2 = B \cos(\omega t + \phi)$ να υπολογίσετε τις συχνότητές τους για την περίπτωση που:

$$s_1 = s_2 = s, m_1 = m_2 = m, \omega_0^2 = (s / m)$$



ΛΥΣΗ



(α) Μάζα m_1 :

$$\Sigma F_x = m_1 \ddot{x}_1 \Rightarrow S_2 X_2 - S_2 X_1 - S_1 X_1 = m_1 \ddot{x}_1 \Rightarrow \{m_1 \ddot{x}_1 + S_1 X_1 + S_2 X_1 - S_2 X_2 = 0\} \quad (1)$$

Μάζα m_2 : (Κύλιση χωρίς ολίσθηση $\Rightarrow$ μεταφορική και περιστροφική)

$$\Sigma F_x = m_2 \ddot{x}_2 \Rightarrow \text{(Λόγω μεταφοράς)}$$

$$\Rightarrow S_2 X_1 - S_2 X_2 + T_{\text{στατ}} = m_2 \ddot{x}_2 \Rightarrow \{m_2 \ddot{x}_2 + S_2 X_2 - S_2 X_1 - T_{\text{στατ}} = 0\} \quad (2)$$

$$\Sigma M_o = -T_{\text{στατ}} \cdot R$$

$$\Sigma M_o = J(\ddot{\theta}_2) \Rightarrow -T_{\text{στατ}} \cdot R = \frac{m_2 R^2}{2} (\ddot{\theta}_2) \Rightarrow$$

(Λόγω περιστροφής:

$O \rightarrow$ κέντρο κύκλου)

$$\Rightarrow \left\{ -T_{\text{στατ}} = \frac{m_2 R}{2} (\ddot{\theta}_2) \right\} \quad (3)$$

Αντικαθιστώ την (3) στην (2) και προκύπτει:

$$\left. \begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 + S_2 X_2 - S_2 X_1 + \frac{m_2 R}{2} (\ddot{\theta}_2) &= 0 \\ \Rightarrow \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 + S_2 X_2 - S_2 X_1 + \frac{m_2 R}{2} \left(\frac{\ddot{x}_2}{R} \right) &= 0$$

Κύλιση χωρίς ολίσθηση $\Rightarrow \ddot{\theta}_2 = \frac{\ddot{x}_2}{R}$

$$\Rightarrow \left\{ \left(\frac{3m_2}{2} \right) \ddot{x}_2 + (S_2 X_2 - S_2 X_1) = 0 \right\} \quad (A)$$

$$\{m_1 \ddot{x}_1 + (S_1 + S_2) X_1 - S_2 X_2 = 0\} \quad (B)$$

$$\begin{aligned}(\beta) \quad x_1(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \\ x_2(t) &= B \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 B \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στις σχέσεις (Α) και (Β):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3m_2}{2} \right) (-\omega^2 B \cos(\omega t + \varphi)) + s_2 B \cos(\omega t + \varphi) - s_2 A \cos(\omega t + \varphi) &= 0 \\ (m_1) (-\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) + (s_1 + s_2) A \cos(\omega t + \varphi) - s_2 B \cos(\omega t + \varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(-s_2) + B \left(\frac{-3m_2}{2} \omega^2 + s_2 \right) &= 0 \\ A(-\omega^2 m_1 + s_1 + s_2) + B(-s_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Θέτω: } s_1 &= s_2 = s \\ m_1 &= m_2 = m \\ \text{και διαιρώ τις 2 εξισώσεις με τη μάζα } m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{s}{m}$$

$$\Rightarrow A(-\omega_0^2) + B \left(\omega_0^2 - \frac{3}{2} \omega^2 \right) = 0$$

$$A(2\omega_0^2 - \omega^2) + B(-\omega_0^2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \frac{3}{2} \omega^2 \\ 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-\omega_0^2)(-\omega_0^2) - \left(\omega_0^2 - \frac{3}{2} \omega^2 \right) (2\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \omega^4 - 4\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega^4 - \frac{8}{3} \omega_0^2 \omega^2 + \frac{2}{3} \omega_0^4 = 0$$

$$\boxed{\omega_{1,2} = (\omega_0^2) \sqrt{\left(\frac{4 \pm \sqrt{10}}{3} \right)}}$$

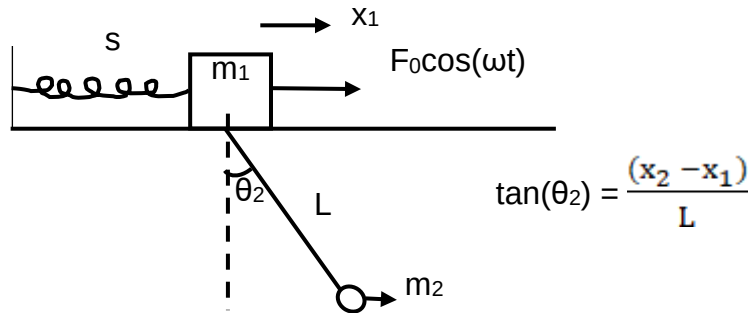
Θέμα 2 (Κανονική 2017)

Απλός αρμονικός ταλαντωτής (s , m_1), χωρίς τριβές, συνδέεται (μέσω κατάλληλης εγκοπής στο οριζόντιο δάπεδο στήριξής του) με απλό εκκρεμές (L , m_2) όπως στο σχήμα. Στο σώμα m_1 εφαρμόζεται αρμονική δύναμη $F = F_0 \cos(\omega t)$.

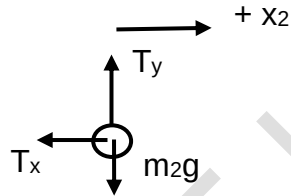
- (α) Γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης, για τις δύο μάζες.
(β) Θεωρήστε ότι, στη μόνιμη κατάσταση κίνησης, το σύστημα εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους με τη συχνότητα διέγερσης ω : $x_1 = A \cos(\omega t)$ και $x_2 = B \cos(\omega t)$, και υπολογίστε τα πλάτη $A = A(\omega)$ και $B = B(\omega)$.
(γ) Υπολογίστε τις συχνότητες για τις οποίες απειρίζονται τα πλάτη A και B , καθώς και τη συχνότητα για την οποία μηδενίζεται ένα από τα δύο πλάτη (ποιο;) και σχολιάστε.

ΛΥΣΗ

(α)



Φτιάχνουμε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος ξεχωριστά για τις μάζες m_2 και m_1 .



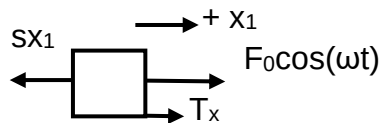
$$T_x = T \sin \theta$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = m_2 g \Rightarrow T = \left(\frac{m_2 g}{\cos \theta} \right)$$

$$\Sigma F_{x_2} = m_2 \ddot{x}_2 \Rightarrow -T_x = m_2 \ddot{x}_2 \Rightarrow -T \sin \theta = m_2 \ddot{x}_2 \Rightarrow -(m_2 g) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = m_2 \ddot{x}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(m_2 g) \tan \theta = m_2 \ddot{x}_2 \Rightarrow -(\cancel{m_2} g) \frac{(x_2 - x_1)}{L} = \cancel{m_2} \ddot{x}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \ddot{x}_2 + g \frac{x_2}{L} - g \frac{x_1}{L} = 0 \right\} \quad (1)$$



$$\Sigma F_{x_1} = m_1 \ddot{x}_1 \Rightarrow T_x + F_0 \cos(\omega t) - Sx_1 = m_1 \ddot{x}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ m_2 g \frac{(x_2 - x_1)}{L} + F_0 \cos(\omega t) - Sx_1 = m_1 \ddot{x}_1 \right\} \quad (2)$$

(β) Θέτω: $x_1 = A \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 A \cos(\omega t)$
 $x_2 = B \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 B \cos(\omega t)$

Αντικαθιστώ στις διαφορικές εξισώσεις (1) και (2):

$$-\omega^2 B \cos(\omega t) + \frac{g}{L} B \cos(\omega t) - \frac{g}{L} A \cos(\omega t) = 0 \Rightarrow -\omega^2 B + \frac{gB}{L} - \frac{gA}{L} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \left(-\omega^2 + \frac{g}{L} \right) + A \left(-\frac{g}{L} \right) = 0 \Rightarrow \left\{ A \left(-\frac{g}{L} \right) + B \left(\frac{g}{L} - \omega^2 \right) = 0 \right\} \quad (3)$$

$$m_2 g \frac{(B-A)}{L} \cos(\omega t) + F_0 \cos(\omega t) - s A \cos(\omega t) = (-m_1 \omega^2 A \cos(\omega t)) \Rightarrow$$

$$\frac{m_2 g}{L} (B) - \frac{m_2 g}{L} (A) + F_0 - s A = -m_1 \omega^2 A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ A \left(m_1 \omega^2 - s - \frac{m_2 g}{L} \right) + B \left(\frac{m_2 g}{L} \right) + F_0 = 0 \right\} \quad (4)$$

Από (3) $\Rightarrow$ $A = \frac{B \left(\omega^2 - \frac{g}{L} \right)}{\frac{g}{L}}$ (5)

Αντικαθιστώ την (5) στην (4) και προκύπτει:

$$\frac{BL}{g} \omega^2 (m_1 \omega^2) - \frac{BL}{g} \left(\frac{g}{L} \right) (-s) + \frac{B m_2 g}{L} + F_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BL m_1}{g} \omega^4 + (Bs) + \frac{B m_2 g}{L} + F_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BL}{g} (\omega^4) + (B) \frac{(s)}{m_1} + \frac{Bg m_2}{L m_1} + \frac{F_0}{m_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BL}{g} (\omega^4) + (B) \omega_{01}^2 + B \omega_{02}^2 \frac{(m_2)}{m_1} + \frac{F_0}{m_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \left(\frac{L}{g} \omega^4 + \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \frac{(m_2)}{m_1} \right) = -\frac{F_0}{m_1} \Rightarrow$$

Θέτω: $\omega_{01}^2 = \frac{(s)}{m_1}$ και

$\omega_{02}^2 = \left(\frac{g}{L} \right)$

$$\Rightarrow B(\omega) = \frac{\left(-\frac{F_0}{m_1} \right)}{\left(\frac{L}{g} \omega^4 + \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \frac{m_2}{m_1} \right)} = \frac{\left(-\frac{F_0}{m_1} \right)}{\left(\frac{\omega^4}{\omega_{02}^2} + \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \frac{m_2}{m_1} \right)}$$

Από (5) $\Rightarrow$ $A(\omega) = \frac{\left(-\frac{F_0}{m_1} \right) \left(\omega^2 - \frac{g}{L} \right)}{\omega_{02}^2 \left(\frac{\omega^4}{\omega_{02}^2} + \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \frac{m_2}{m_1} \right)}$

(γ) Από τα δύο πλάτη μηδενίζεται το A, όταν ισχύει: $(\omega^2 - g/L) = 0 \Rightarrow \omega^2 = (\omega_{02}^2)$

$\Rightarrow$ $\omega = \omega_{02}$

Τα πλάτη Α και Β απειρίζονται όταν ισχύει:

$$\frac{\omega^4}{\omega_{02}^2} + \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \frac{m_2}{m_1} = 0 \Rightarrow \frac{\omega^4}{\omega_{02}^2} = -\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega^4 = (\omega_{02}^2) \left(-\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 \frac{m_2}{m_1} \right) \Rightarrow (\text{άτοπο})$$

Το Α απειρίζεται όταν ισχύει:

$$(\omega_{02}^2 \rightarrow 0) \Rightarrow \underline{\omega_0 \rightarrow 0}$$