

Διπλό οδοκάθρυμα

Έστω $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχή συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f(x,y) \geq 0$ για κάθε σημείο ενός φραγμένου και κλειστού συνόλου $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Για να υπολογίσουμε το διπλό οδοκάθρυμα $\iint_D f(x,y) dx dy$ θα πρέπει να δώσουμε συγκεκριμένη μέθοδο η οποία να δαφάδνει υπ'όψιν των ποάδανόματα των μεταβάρων.

Έστω: $I = \iint_D f(x,y) dx dy$. Θα καφάουμε να

υπολογίσουμε το διπλό οδοκάθρυμα I κυρίως σε χωρία τα οποία είναι επίπεδα. Σε αυτών την περίπτωση το χωρίο D θα αποτεδείται από εκείνα τα ζεύγη (x,y) με $x \in [a,b]$ / $y \in [c,d]$. Σε αυτών την περίπτωση το χωρίο D αποτεδεί ένα κλειστό ορθόγνιο.

Κάραυν περίπτωσηες όπου η μία από τις 2 μεταβάρτες έχει τιμές σε ένα σταθερό χωρίο ενώ η άλλη δαφάδνει τιμές που καθορίζονται από τον τύπο συνάρτησης

$$\text{Πχ. } D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ και } g(x) \leq y \leq h(x) \}$$

Τότε, το χωρίο D ονομάζεται από ως προς x .

Αντίστοιχα, αν έχουμε ένα χωρίο:

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq y \leq b \text{ και } g(y) \leq x \leq h(y) \}$$

Τότε, το χωρίο D ονομάζεται από ως προς y .

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα:

$$I = \iint_D y \sin(xy) dx dy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2 \text{ και } 0 \leq y \leq \pi\}$$

ΛΥΣΗ

$$I = \int_0^\pi \left(\int_1^2 y \sin(xy) dx \right) dy \quad (1)$$

Ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς x θέτοντας στα άκρα ολοκλήρωσης τις τιμές του πεδίου ορισμού του x και στη συνέχεια, ολοκληρώνουμε ως προς y θέτοντας στα άκρα τις τιμές του πεδίου ορισμού της μεταβλητής y .

$$\text{Από (1)} \Rightarrow I = \int_0^\pi \left(\left[-\cos(xy) \right]_{x=1}^2 \right) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y) dy = \left[-\frac{\sin 2y}{2} + \sin y \right]_0^\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\sin 2\pi}{2} + \sin \pi + \frac{\sin 0}{2} - \sin 0 = \boxed{I=0}$$

Συμπέρασμα: Όταν εφαρμόζουμε ολοκλήρωση ως προς 2 μεταβλητές, ισχύει ότι και στη μερική παραγώγιση. Το διαφορικό στο οποίο εργαζόμαστε καθορίζει και τη μεταβλητή ως προς την οποία θα εργασόμαστε, ενώ οι εκφράσεις της άλλης μεταβλητής θεωρούνται ως σταθερές.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D (x) dx dy$
 όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1 \text{ και } -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y\}$

ΛΥΣΗ

Το ολοκλήρωμα $I = \iint_D (x) dx dy$ είναι ολοκλήρωμα το οποίο ορίζεται σε ένα χωρίο ανδρώς προς y. Σε αυτήν την περίπτωση, ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς το άνω άκρο x και στη συνέχεια ως προς το ανδρώ άκρο y.

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=1-y} (x) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} \right) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^2}{2} - \frac{(-\sqrt{1-y^2})^2}{2} \right) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^1 (\cancel{1+y^2} - 1 - 2y + y^2) dy \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^1 (2y^2 - 2y) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 (y^2 - y) dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right) \Rightarrow \boxed{I = -\frac{1}{6}}$$

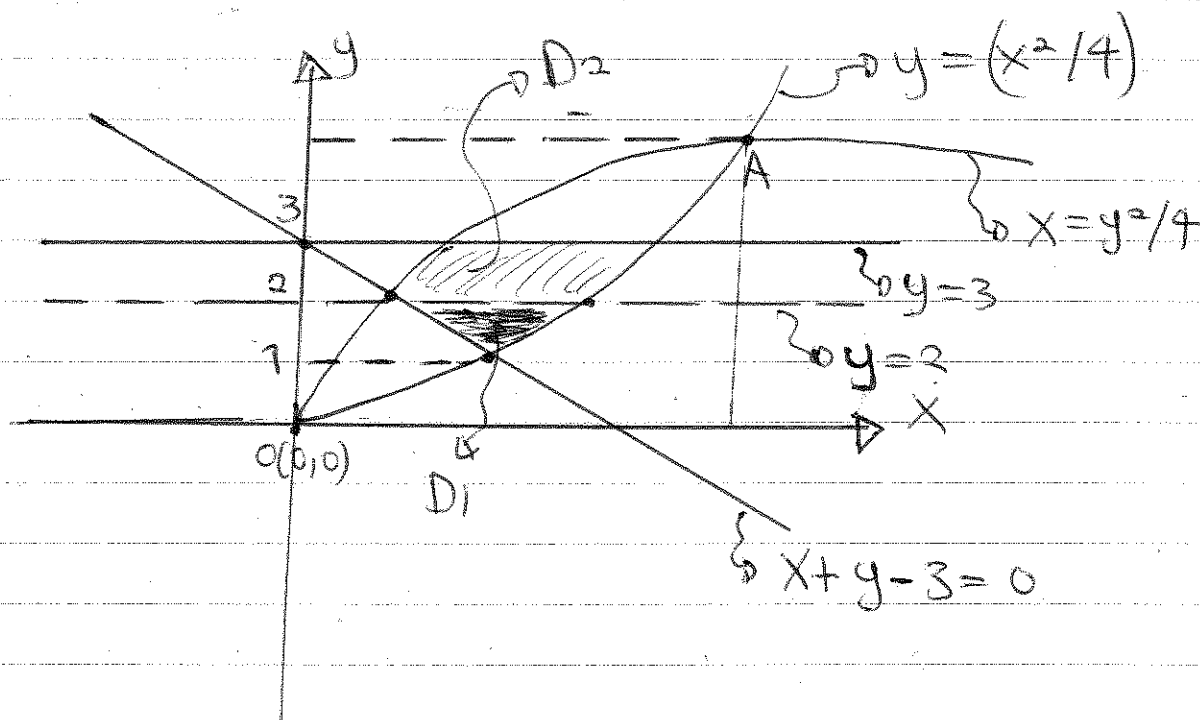
Στην περίπτωση που μας ζητούσαν να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα το οποίο είναι ανδρώς προς x, τότε ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς το άνω άκρο y και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς το ανδρώ άκρο x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να υπολογίσετε το οδοκύρωμα: $I = \iint_D (x-y) dy dx$
 όπου το χωρίο D περικλείεται από τις
 καμπύδες με εξισώσεις $x = (y^2/4)$ και $y = x^2/4$
 και τις ευθείες με εξισώσεις:
 $x+y-3=0$ / $y=3$

ΛΥΣΗ

Σε αυτό το παράδειγμα, ζητείται ο υπολογισμός ενός οδοκύρωματος όπου οι τιμές των μεταβλητών (x, y) δεν είναι σαφώς καθορισμένες και ορίζονται από γεωμετρικούς τόπους. Σε τέτοιες περιπτώσεις ασκήσεων θα πρέπει να τις αντιμετωπίσουμε γραφικά, κατασκευάζοντας τις επιμέρους καμπύδες και ευθείες και διαχωρίζοντας με αυτόν τον τρόπο το χωρίο D .



Το χωρίο D το οποίο προκύπτει, "σπάει" σε δύο επιμέρους ανώτερα χωρία D_1 και D_2 .

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2, 3-y \leq x \leq 2\sqrt{y}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 3, \frac{y^2}{4} \leq x \leq 2\sqrt{y}\}$$

$$I = \iint_{D_1} (x-y) dy dx + \iint_{D_2} (x-y) dy dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \left(\int_{3-y}^{2\sqrt{y}} (x-y) dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_{y^2/4}^{2\sqrt{y}} (x-y) dx \right) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - yx \right]_{3-y}^{2\sqrt{y}} dy + \int_2^3 \left[\frac{x^2}{2} - yx \right]_{y^2/4}^{2\sqrt{y}} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \left[\frac{(3-y)^2}{2} + y(3-y) + \frac{(2\sqrt{y})^2}{2} - y(2\sqrt{y}) \right] dy + \int_2^3 \left[\frac{(2\sqrt{y})^2}{2} - y(2\sqrt{y}) - \frac{\left(\frac{y^2}{4}\right)^2}{2} + y\left(\frac{y^2}{4}\right) \right] dy$$

$$\Rightarrow I = (---)$$

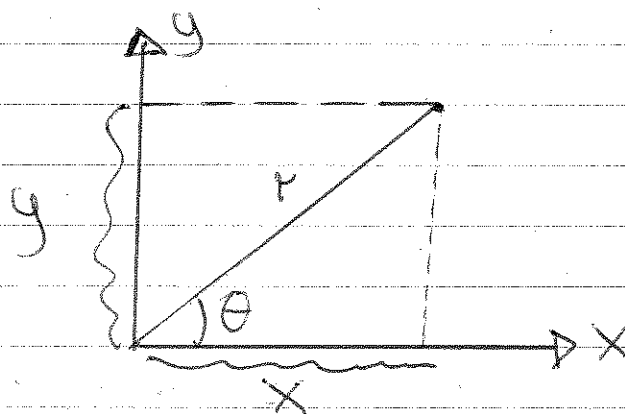
Πολικές Συντεταγμένες - Αλλαγή μεταβλητών

Σε ορισμένες περιπτώσεις, για να υπολογίσουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) .

Θέτω:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \Rightarrow x^2 = r^2 \cos^2 \theta \\ y &= r \sin \theta \Rightarrow y^2 = r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$



Αν το χωρίο ολοκλήρωσης D είναι κυκλικός δίσκος, τότε είναι πολύ πιθανό να κάνουμε μετασχηματισμό από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες.

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών σε διπλό ολοκλήρωμα

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$, τότε για το διπλό ολοκλήρωμα ισχύει:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} F(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

$$F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$$

D_1 : το χωρίο στο οποίο μετασχηματίζεται το αρχικά ορισμένο χωρίο D λόγω της αλλαγής των μεταβλητών

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \sim \text{η Ιακωβιανή ορίζουσα}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

για την περίπτωση
πολικών συντεταγμένων

Με βάση την αρχική σχέση του θεωρήματος, όταν έχουμε πολικές συντεταγμένες θα προκύπτει:

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \underbrace{r}_{\text{Προσοχή!!!}} dr d\theta \quad (1)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το οδοκύριμα: $I = \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy$
όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

ΛΥΣΗ

Η ανίσωτα $(x^2 + y^2) \leq 4$, εκφράζει κυκλικό δίσκο για το δοσμένο χωρίο D . Επομένως, με βάση

τα παραπάνω θα κάνουμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες.

$$\begin{aligned}\theta \text{ ζων: } x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 \leq x^2 + y^2 \leq 4 &\Rightarrow 0 \leq r^2 \leq 4 \Rightarrow \boxed{0 \leq r \leq 2} \\ \theta \in [0, 2\pi] &\Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow f(r, \theta) = (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(r, \theta) = r^2 + 1\end{aligned}$$

$$\text{Από } \textcircled{1} \Rightarrow I = \iint_{D_1} (r^2 + 1) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (r^2 + 1) r \, dr \right) d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (r^3 + r) \, dr \right) d\theta \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_0^2 d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} (6) d\theta = [6\theta]_0^{2\pi} \Rightarrow \boxed{I = 12\pi}$$