

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ορισμός Αορίστου Ολοκληρώματος

Το σύνολο όλων των παραγουσών (ή αλλιώς αρχικών συναρτήσεων) μιας συνάρτησης f ή οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Ως παράγουσα συνάρτηση F της f ορίζεται η συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Όπου c μία σταθερά που ανήκει στο $\mathbb{R}$

Αόριστα Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων

- $\int 0 dx = c, c \in \mathbb{R}$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int e^x dx = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}$
(Για $a = e$ προκύπτει το ολοκλήρωμα $\int e^x dx$)
- $\int \cos x dx = \sin x + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctan} x + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Arcsin} x + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int \sinh x dx = \cosh x + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int \cosh x dx = \sinh x + c, c \in \mathbb{R}$

Εδώ υπενθυμίζουμε ότι:

$$(\sinh x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(\cosh x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Γενικευμένοι Τύποι Υπολογισμού

- 1) $\int \frac{1}{x^2 + \kappa^2} dx = \frac{1}{\kappa} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\kappa}\right) + c, c \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \neq 0$
- 2) $\int (f(x))^a f'(x) dx = \frac{(f(x))^{a+1}}{a+1} + c, c \in \mathbb{R}$
- 3) $\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}$
- 4) $\int e^x (g(x) + g'(x)) dx = \int (e^x g(x))' dx = e^x g(x) + c, c \in \mathbb{R}$

Παρατηρήσεις

- 1) Η σταθερά $c \in \mathbb{R}$ δεν πρέπει να παραλείπεται στον υπολογισμό αόριστων ολοκληρωμάτων, διότι υποδηλώνει το μη πεπερασμένο πλήθος παραγουσών συναρτήσεων, άρα η σταθερά c είναι ταυτισμένη με την έννοια του αόριστου ολοκληρώματος.
- 2) Η σχέση (2) των γενικευμένων τύπων αξιοποιείται πολύ συχνά σε κλασματικές συναρτήσεις όπου τον παρονομαστή τον «ανεβάζουμε» σαν αριθμητή με τον εκθέτη να αλλάζει και να γίνεται αντίθετος.
- 3) Αν στην σχέση (3) των γενικευμένων τύπων θέσουμε $a = e$ θα προκύψει:

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = \frac{e^{f(x)}}{\ln e} + c = e^{f(x)} + c, c \in \mathbb{R}$$

- 4) Για $\alpha = -1$ στην σχέση (2) έχουμε:

$$\int (f(x))^{-1} f'(x) dx = \ln|f(x)| + c, c \in \mathbb{R}$$

Ορισμός Διαφορικής Εξίσωσης

Διαφορική ονομάζεται η εξίσωση η οποία περιέχει μία ή περισσότερες άγνωστες συναρτήσεις καθώς και τις παραγώγους της μέχρι μία ορισμένη τάξης. Στα πλαίσια αυτού του βιβλίου, θα ασχοληθούμε με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, δηλαδή με εξισώσεις όπου οι άγνωστες συναρτήσεις είναι μίας μεταβλητής. Υπάρχουν και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που είναι συνήθως μάθημα παραπάνου εξαμήνου όπου οι άγνωστες συναρτήσεις είναι πολλών μεταβλητών.

Γενική Μορφή συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης

Η γενική μορφή μίας διαφορικής εξίσωσης είναι η εξής:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad (A)$$

Ο συμβολισμός $y^{(n)}$ υποδηλώνει την παράγωγο n -οστής τάξης. Στο σύγγραμμά αυτό, θα ασχοληθούμε με την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης και δευτέρας τάξης.

Μία πιο απλοποιημένη μορφή της γενικής μορφής (A) είναι η εξής:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (B)$$

Η (B) ονομάζεται λυμένη μορφή της συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

Μεγέθη που εμφανίζονται σε μία συνήθη Διαφορική Εξίσωσης

x : ανεξάρτητη μεταβλητή

$y(x)$: πραγματική συνάρτηση η οποία αποτελεί λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Κάθε διαφορική εξίσωση μπορεί να μην έχει λύση. Επίσης μπορεί να έχει πρακτικά άπειρες λύσεις ή και μόνο 1 λύση.

Ολοκληρωτική Καμπύλη καλείται η γραφική παράσταση κάθε λύσης της συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

Συχνά σε ασκήσεις, η δοσμένη συνήθης διαφορική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις. Οι μορφές των ασκήσεων που συχνά ασχολούμαστε ονομάζονται προβλήματα αρχικών τιμών ή αλλιώς προβλήματα Cauchy, και στόχος σε αυτές τις ασκήσεις είναι η εύρεση μίας εκ των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης έτσι ώστε να ικανοποιούνται κάποιες αρχικές συνθήκες.

Παραδείγματα Διαφορικών Εξισώσεων

- $y'' = xy' - y^2$
Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι δευτέρας τάξης καθώς η τάξη της μεγιστοτάξιας παραγώγου είναι 2. Ανήκει στην λυμένη μορφή (B).
- $x \ln(y' - y) - e^{y''} = 0$
Είναι 2^{ης} τάξης και ανήκει στην γενική μορφή (A).

Σε προβλήματα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) θα δίνεται η διαφορική εξίσωση στην μορφή (A) ή (B) και θα δίνεται επίσης μία τιμή της συνάρτησης y σε ένα σημείο x του πεδίου ορισμού της. Αυτές οι δύο συνθήκες αποτελούν τις αρχικές συνθήκες του Π.Α.Τ.

Όπως θα δούμε, στόχος μας θα είναι η εύρεση της γενικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης $y(x)$, για την οποία θα χρειαστεί να μάθουμε μία σειρά από μεθόδους. Η γενική λύση $y(x)$ θα περιέχει και την σταθερά $c \in \mathbb{R}$, την οποία θα μπορούμε να την υπολογίζουμε όταν μας δίνεται μία αρχική τιμή της $y(x)$ σε ένα σημείο x του πεδίου ορισμού.

Παράδειγμα

$$y'' = y' + 2y$$

Η εξίσωση είναι 2^{ης} τάξης

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση για να επιλυθεί απαιτείται εφαρμογή συγκεκριμένης μεθόδου. Αν μαζί με αυτήν δινόταν στην εκφώνηση και μία δεδομένη αριθμητική τιμή, π.χ.

$y(0) = 1$ ή $y(1) = 1$, τότε πρόκειται για την Π.Α.Τ όπου η λύση του θα αποτελούσε μία συγκεκριμένη συνάρτηση για την οποία θα έπρεπε να υπολογίσουμε τη σταθερά $c \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Η λύση μίας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται και γενικό ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης.

Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Αυτή η κατηγορία διαφορικών εξισώσεων περιλαμβάνει αυτές τις εξισώσεις που περιέχουν μόνο την y και την παράγωγο πρώτης τάξης της y' .

Οι μορφές που μπορούμε να την συναντήσουμε είναι οι εξής:

(A) $F(x, y, y') = 0$

(B) $y' = g(x, y)$

Ισχύει ότι:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Αν στην (B) θέσουμε:

$$g(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Επομένως:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \Rightarrow \\ P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Παράδειγμα

$$xy' = y$$

Εδώ, με εύκολο τρόπο μπορώ να απομονώσω το x και το y με κατάλληλη διαίρεση. Η διαίρεση αυτή θα είναι με το xy . Άρα θα έχω:

$$\frac{xy'}{xy} = \frac{y}{xy} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

Τώρα έχω διαχωρίσει το y και το x . Για να συνεχίσω πρέπει να διαχωρίσω και τα διαφορικά dx και dy . Άρα γράφοντας:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Θα έχω:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx$$

Όταν φτάσω στο βήμα όπου θα έχω διαχωρίσει όλα τα διαφορικά πρέπει να ολοκληρώσω:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\ln y = \ln x + c \Rightarrow$$

$$e^{\ln y} = e^{\ln x} e^c$$

Το εκθετικό όμως υψωμένο σε μία σταθερά είναι μία άλλη σταθερά, έστω c_1 . Άρα έχω:

$$y = c_1 x$$

Όταν έχουμε βρει την τελική συνάρτηση του y έχει ολοκληρωθεί η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι έχουμε την διαφορική εξίσωση:

$$y' + 5xy = 3x$$

Αυτή η εξίσωση, με μία πρώτη ματιά φαίνεται ότι δεν είναι χωριζομένων μεταβλητών. Όμως αυτή η διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, κάτι που θα δείξουμε αμέσως:

$$y' = 3x - 5xy = (3 - 5y)x \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{3 - 5y} = x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3 - 5y} \frac{dy}{dx} = x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3 - 5y} dy = x dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{3 - 5y} dy = \int x dx \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{5} \ln|3 - 5y| = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \dots$$

Άσκηση

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' \frac{1}{\sin x} = y - 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10, y > 1$$

Ισχύει:

$$y' \frac{1}{\sin x} = y - 1 \Rightarrow$$

$$y' \frac{1}{y-1} = \sin x \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{y-1} dy = \int \sin x dx \Rightarrow$$

$$\ln(y-1) = -\cos x + c \Rightarrow$$

$$(y-1) = c_1 e^{-\cos x} \Rightarrow$$

$$y = 1 + c_1 e^{-\cos x} \Rightarrow$$

Όμως έχουμε ότι:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10 \Rightarrow$$

$$1 + c_1 e^{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 10 \Rightarrow$$

$$1 + c_1 e^0 = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 = 9$$

Επομένως το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει λύση:

$$y = 1 + 9e^{-\cos x} \Rightarrow$$

Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω ότι:

$$y' = F(x, y)$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι:

$$F(tx, ty) = F(x, y)$$

Τότε η διαφορική εξίσωση καλείται ομογενής.

Παράδειγμα

Η διαφορική εξίσωση $y' = \frac{2xy}{x^2+9y^2}$ είναι ομογενής καθώς αν ορίσουμε $F(x, y) = \frac{2xy}{x^2+9y^2}$ τότε:

$$\begin{aligned} F(tx, ty) &= \frac{2txty}{(tx)^2 + 9(ty)^2} = \\ &= \frac{2xyt^2}{t^2x^2 + 9t^2y^2} = \\ &= \frac{2xy}{(x^2 + 9y^2)t^2} t^2 = \\ &= \frac{2xy}{x^2 + 9y^2} = F(x, y) \end{aligned}$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση είναι ομογενής.

Σημείωση

Για να καταλάβουμε ότι μία διαφορική εξίσωση είναι ομογενής επιβεβαιώνουμε πάντα με τον προηγούμενο τρόπο. Για να το διακρίνουμε αυτό από πριν, πρέπει η συνολική δύναμη του x και του y (δηλαδή το άθροισμα των δυνάμεών τους) πρέπει σε κάθε μονώνυμο να είναι το ίδιο.

Παράδειγμα

Η διαφορική εξίσωση $y' = \frac{3x^2+6y^2}{2xy}$ είναι ομογενής καθώς στον αριθμητή, το x είναι υψωμένο στο 2, το y στο 2 ενώ στον παρονομαστή το x είναι υψωμένο στην 1 και το y στην 1, επομένως συνολικά είναι υψωμένο στην 2. Επομένως κάθε μονώνυμο έχει δύναμη δύο. Επομένως φαίνεται ότι είναι ομογενής διαφορική εξίσωση. Επιβεβαιώνουμε όμως ότι $F(tx, ty) = F(x, y)$

Για να λυθεί μία τέτοια διαφορική εξίσωση κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$. Μετά αντικαθιστούμε στην δοσμένη διαφορική εξίσωση και λύνουμε ως προς u . Αφού βρούμε το u , δεν πρέπει να ξεχάσουμε να λύσουμε ως προς y μέσω της σχέσης $y = ux$.

Παράδειγμα

Η διαφορική εξίσωση $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$, (1) είναι ομογενής καθώς αν $F(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2xy}$

$$\text{Τότε } F(tx, ty) = \frac{t^2x^2+t^2y^2}{2txtyt} = \frac{t^2(x^2+y^2)}{t^2 2xy} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = F(x, y)$$

Οπότε πρόκειται για ομογενή διαφορική εξίσωση. Κάνω την αλλαγή μεταβλητής:

$$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u(x)' \Rightarrow y' = u'x + u$$

Επομένως αν αντικαταστήσω στην (1):

$$u'x + u = \frac{x^2 + x^2u^2}{2xxu} \Rightarrow$$

$$u'x + u = \frac{\cancel{x^2}(1 + u^2)}{\cancel{x^2}2u} \Rightarrow$$

$$u'x = \frac{1 + u^2}{2u} - u \Rightarrow$$

$$u'x = \frac{1 + u^2 - 2u^2}{2u} \Rightarrow$$

$$u'x = \frac{1 - u^2}{2u} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2u}{1 - u^2} du = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{-(1 - u^2)'}{1 - u^2} = \ln x + c_1 \Rightarrow$$

$$-\ln|1 - u^2| = \ln x + c_1 \Rightarrow$$

$$e^{\ln|1 - u^2|^{-1}} = e^{\ln x} e^{c_1} \Rightarrow$$

$$|1 - u^2|^{-1} = cx \Rightarrow$$

$$1 - u^2 = \pm \frac{1}{cx} \Rightarrow$$

$$u = \pm \sqrt{1 \pm \frac{1}{cx}}$$

Πρέπει τώρα να αντικαταστήσω το u:

$$y = ux \Rightarrow y = \pm x \sqrt{1 \pm \frac{1}{cx}}$$

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Η γενική μορφή των διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης είναι:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Η έννοια γραμμική, όσο αφορά τις διαφορικές εξισώσεις σημαίνει ότι η συνάρτηση y καθώς και οι παράγωγοί της που πιθανώς υπάρχουν είναι είτε υψωμένα στην πρώτη δύναμη αν υπάρχουν (στις εξισώσεις πρώτης τάξης υπάρχει y και y').

Για να λυθεί μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης πρέπει να βρούμε δύο λύσεις, την ομογενή λύση και την μερική λύση και μετά πρέπει να προσθέσουμε τις δύο λύσεις. Για να βρούμε την ομογενή λύση, μηδενίζουμε το $Q(x)$. Άρα έχουμε:

$$y' + P(x)y = 0$$

Επομένως:

$$\frac{y'}{y} = -P(x) \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int P(x) dx \Rightarrow$$

$$\ln y = - \int P(x) dx + c_1$$

$$y_o = c e^{- \int P(x) dx}$$

Για να βρούμε την μερική λύση θεωρούμε ότι αυτή θα είναι σαν την ομογενή, με την διαφορά όμως ότι η σταθερά δεν θα είναι σταθερά αλλά συνάρτηση, έστω $c(x)$. Εδώ να διευκρινίσω ότι η $c(x)$ δεν έχει καμία σχέση με την c . Επομένως αναζητούμε λύση της μορφής:

$$y_\mu = c(x) e^{- \int P(x) dx}$$

Την συνάρτηση y_μ θα αντικαταστήσω στην αρχική εξίσωση, επομένως έχουμε:

$$y'_\mu = c' e^{- \int P(x) dx} + c (e^{- \int P(x) dx})' \Rightarrow$$

$$y'_\mu = c'e^{-\int P(x)dx} - ce^{-\int P(x)dx}P(x) \Rightarrow$$

Και

$$\begin{aligned} y_\mu &= ce^{-\int P(x)dx} \Rightarrow \\ c'e^{-\int P(x)dx} - ce^{-\int P(x)dx}P(x) + ce^{-\int P(x)dx}P(x) &= Q(x) \Rightarrow \\ c'e^{-\int P(x)dx} &= Q(x) \\ c(x) &= \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \end{aligned}$$

Επομένως:

$$y_\mu = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx e^{-\int P(x)dx}$$

Με βάση την y_μ και την y_o βρίσκουμε την γενική λύση της εξίσωσης:

$$y = y_{o\mu} + y_{\mu\epsilon\rho}$$

Διαφορικές Εξισώσεις που ανάγονται σε γραμμικές 1ης τάξης

Υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων οι οποίες με κατάλληλες αντικαταστάσεις ανάγονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης. Αυτές είναι οι διαφορικές εξισώσεις Bernulli και Riccati.

Διαφορική Εξίσωση Bernulli

Η γενική μορφή μίας διαφορικής εξίσωσης Bernulli είναι:

$$y'(x) + P(x)y = Q(x)y^a, (1)$$

Με $a \in \mathbb{R}$ και $a \neq 1$

Σημείωση: Αν το $P(x)y$ πάει από την άλλη μεριά του ίσον και ορίσω $W(x) = -P(x)$ τότε έχω την διαφορική εξίσωση Bernulli στην μορφή:

$$y' = W(x)y + Q(x)y^a$$

Παράδειγμα

Η διαφορική εξίσωση:

$$e^x y' = xy + 2\ln x y^3$$

Είναι μία διαφορική εξίσωση Bernulli καθώς μπορώ να την γράψω στην μορφή:

$$y' = \frac{x}{e^x} y + \frac{2\ln x}{e^x} y^3$$

Με $P(x) = -\frac{x}{e^x}$ και $Q(x) = \frac{2\ln x}{e^x}$, $p = 3$

Για να λυθούν πρέπει να κάνουμε την αντικατάσταση:

$$\begin{aligned} u &= y^{1-a} \Rightarrow \\ u' &= (1-a)y^{1-a-1}y' \Rightarrow \\ y' &= \frac{u'}{(1-a)y^{-a}} \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε αυτή την εξίσωση στην (1) και προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{u'}{(1-a)y^{-a}} + P(x)y &= Q(x)y^a \Rightarrow \\ \frac{y^{-a}u'}{(1-a)y^{-a}} + P(x)y^{1-a} &= Q(x) \Rightarrow \\ u' + (1-a)P(x)u(x) - (1-a)Q(x) &= 0 \end{aligned}$$

η οποία αποτελεί γραμμικής διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης.

Παράδειγμα

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την διαφορική εξίσωση $y' = y + e^x y^{\frac{1}{2}}$, (1)

Αμέσως αναγνωρίζουμε ότι αποτελεί εξίσωση Bernulli με $p = \frac{1}{2}$, $P(x) = 1$, $Q(x) = e^x$ άρα μπορούμε να θέσουμε:

$$y = u^{\frac{1}{1-1/2}} = u^{\frac{1}{1/2}} = u^2$$

Άρα

$$y' = 2uu'$$

Επομένως η (1) γίνεται

$$2uu' = u^2 + e^x u \Rightarrow$$

$$2u' = u + e^x$$

Αυτή είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση που λύνεται σαν γραμμική διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης.

Διαφορική Εξίσωση Ricatti

Η γενική μορφή μίας διαφορικής εξίσωσης Ricatti είναι:

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0, (1)$$

Η κατηγορία αυτών των διαφορικών εξισώσεων γίνεται πιο εύκολα αντιληπτή από την εκφώνηση της άσκησης καθώς θα δίνεται μία μερική λύσης. Στην εκφώνηση δεν θα διευκρινίζεται ότι αποτελεί διαφορική εξίσωση αυτού του τύπου αλλά από την στιγμή που θα είναι δοσμένη η μερική λύση τότε κατά πάσα πιθανότητα θα αποτελεί διαφορική εξίσωση Ricatti.

Παράδειγμα

$$\text{Η εξίσωση } y' + xy + 2e^x y^2 + 10\ln x - \sin 2x = 0$$

Αποτελεί μία διαφορική εξίσωση Ricatti που μπορεί να γραφεί και ως:

$$y' + xy + 2e^x y^2 + 10\ln x - \sin 2x$$

$$\text{Με } P(x) = 2e^x \text{ και } Q(x) = x, R(x) = 10\ln x - \sin 2x$$

Παράδειγμα

Η διαφορική εξίσωση $y' + xy^3 + e^x = 0$ δεν αποτελεί διαφορική εξίσωση Riccati καθώς η δύναμη που έχει το y είναι 3 κι όχι 2.

Η αντικατάσταση που κάνω σε μία διαφορική εξίσωση Ricatti, αφού έχει δοθεί μία μερική της λύση y_1 , είναι:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) τις εκφράσεις της $y(x)$ και $y'(x)$ και προκύπτει γραμμική διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης ως προς $u(x)$.

Παράδειγμα

Έστω η διαφορική εξίσωση Ricatti:

$$y' + 2y^2 = 6/x^2, (1) \text{ με μία λύση } y_1 = 2/x$$

$$\text{Κάνω την αντικατάσταση } y = \frac{2}{x} + \frac{1}{u}, (2)$$

$$y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2}, (3)$$

Αντικαθιστώ την (2) και (3) στην (1) άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2} + 2\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right)^2 &= \frac{6}{x^2} \Rightarrow \\ -\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2} + 2\left(\frac{4}{x^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{4}{xu}\right) &= \frac{6}{x^2} \Rightarrow \\ -\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2} + \frac{8}{x^2} + \frac{2}{u^2} + \frac{8}{xu} &= \frac{6}{x^2} \Rightarrow \\ -\frac{u'}{u^2} + \frac{8}{xu} + \frac{2}{u^2} &= 0 \Rightarrow \\ -u' + \frac{8}{x}u + 2 &= 0 \Rightarrow \\ u' - \frac{8}{x}u - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Αυτή είναι μία γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης που λύνεται κατά τα γνωστά με μία ομογενή και μία μερική λύση.

Παρατηρήσεις για τις διαφορικές εξισώσεις Bernulli και Ricatti.

- 1) Είναι απαραίτητο να θυμόμαστε τις γενικές τους μορφές για να μπορούμε να τις αναγνωρίζουμε στη δοσμένη εκφώνηση, καθώς και την αντικατάσταση που χρησιμοποιούμε σε καθεμία.
- 2) Από την στιγμή που και οι δύο ανάγονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1^{ης} τάξης, θα πρέπει να γνωρίζουμε την μέθοδο επίλυσης των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης.
- 3) Η χρήση αόριστων ολοκληρωμάτων, είναι πολύ βασικό «εργαλείο» για την εφαρμογή και την επίλυση των ασκήσεων, επομένως απαιτείται να θυμηθούμε το τυπολόγιο των βασικών αόριστων ολοκληρωμάτων.
- 4) Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται όταν παραγωγίζουμε την $y(s)$ γιατί εμπεριέχονται σύνθετες συναρτήσεις και πρέπει η παραγωγή να γίνει σωστή, ώστε να προκύψει η νέα διαφορική εξίσωση ως προς $u(x)$.

Άμεσα Ολοκληρώσιμες Διαφορικές Εξισώσεις

Αν έχω μία διαφορική εξίσωση η οποία είναι της μορφής

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, (1)$$

Τότε αυτή καλείται ακριβής ή τέλεια όταν ισχύει:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, (2)$$

Σημείωση: Μπορεί η δοσμένη εξίσωση να είναι στην μορφή $y' = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$. Αυτή ανάγεται στην

(1) εξίσωση αν γράψουμε $y' = \frac{dy}{dx}$ και κάνουμε πράξεις.

Αν ισχύει η συνθήκη (2) θεωρούμε μία συνάρτηση f η οποία αποτελεί την λύση της διαφορικής εξίσωσης για την οποία ισχύουν τα εξής:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y) \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y)$$

Αν αντικαταστήσουμε το P και το Q στην εξίσωση (1) έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

Η παράσταση $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ αποτελεί το ολικό διαφορικό της συνάρτησης $F(x, y)$. Επομένως έχουμε:

$$df = 0$$

Επομένως η γενική λύση της (1) είναι:

$$f(x, y) = c$$

όπου c σταθερά που ανήκει στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$ydx + xdy = 0$$

Από την μορφή που δίνεται καταλαβαίνουμε ότι μπορεί να είναι άμεσα ολοκληρώσιμη. Αυτό γιατί δίνεται στην μορφή (1). Επομένως έχω:

$$P(x, y) = y, Q(x, y) = x$$

Αν παραγωγίσουμε μερικώς έχουμε:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Επομένως ισχύει ότι:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, (3)$$

Επομένως πρόκειται για ακριβής εξίσωση.

Αναζητώ λύση f για την οποία θα ισχύει:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow$$
$$df = ydx \Rightarrow$$
$$f = \int ydx \Rightarrow$$
$$f(x, y) = yx + c_1(y)$$

Προσοχή: Εδώ η σταθερά είναι συνάρτηση του y καθώς δεν γνωρίζω ποια συνάρτηση θα μπορούσε να πάει εκεί. Αν παραγωγίσω την σχέση γυρίζω στο y άσχετα από το ποια συνάρτηση βρίσκεται στο $c_1(y)$ οπότε έχω αυθαιρεσία μίας συνάρτησης ως προς y .

Παραγωγίζω τώρα την τελευταία σχέση ως προς την άλλη μεταβλητή, την y , κι έχω:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial c_1}{\partial y}$$

$$\text{Όμως } \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y) = x$$

Άρα συνδυάζοντας αυτές τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε:

$$x + \frac{\partial c_1}{\partial y} = x \Rightarrow$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$c_1(y) = c_2 = \text{σταθερά}$$

Τώρα όντως η συνάρτηση ως προς y βγήκε να είναι μία σταθερά, όμως δεν συμβαίνει πάντα κάτι τέτοιο. Επομένως, αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:

$$f(x, y) = yx + c_2 = c$$

$$f(x, y) = yx + c_3$$

Πολλαπλασιαστής Euler

Όσο αφορά τις διαφορικές εξισώσεις που δεν είναι ακριβείς, δηλαδή όταν ισχύει:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Τότε, κάποιες από αυτές μπορεί να αναχθούν σε ακριβείς χρησιμοποιώντας έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα μ που μπορεί να είναι συνάρτηση είτε το x αλλά είτε του y . Εδώ, πρέπει να αναφέρω ότι αρχικά δοκιμάζω αν ισχύει η ισότητα για τις ακριβείς. Μετά, αν δεν ισχύει η ισότητα, θεωρώ έναν παράγοντα $\mu = \mu(x)$ για τον οποίο ισχύει:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, (1)$$

Αν κάνοντας πράξεις καταλήξω ότι η συνάρτηση $\mu(x)$ βρίσκεται σε διαφορική εξίσωση που περιέχει μεταβλητή y , απορρίπτουμε την αρχική θεώρηση και συμπεραίνουμε πως το μ δεν είναι συνάρτηση του x αλλά του y . Μετά χρησιμοποιούμε ξανά την εξίσωση (1) με μ όμως που είναι συνάρτηση μόνο της y τώρα. Αν πάλι δεν βγει διαφορική εξίσωση ως προς y αλλά περιέχει όρους x τότε δεν μπορεί η διαφορική εξίσωση να λυθεί με αυτόν τον τρόπο.

Στην περίπτωση που δοκιμάζουμε $\mu = \mu(x)$ έχουμε:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$$

Η τελευταία σχέση όπως έχω αναφέρει, πρέπει να είναι συνάρτηση μόνο ως προς x. Αν περιέχει y τότε η κάνοντας πράξεις φεύγει ή αν όχι δοκιμάζω $\mu = \mu(y)$ κι ελέγχω πάλι το ίδιο:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu Q_x$$

$$\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}$$

Πανεπιστημιακά Φροντιστήρια Δημήτρη Ηλία